台北市 101 學年度
高級中學數理及資訊學科能力競賽
數學科筆試(一)試題

編號：____________(學生自填)

注意事項：

1. 本試卷共四題計算證明題，滿分 49 分。
2. 考試時間：2 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將過程填寫在答案卷內。

【問題一】設 $r \ge s \ge t \ge u \ge 0$ 且滿足 $5r+4s+3t+6u=2012$。試求 $r+s+t+u$ 的最大值與最小值。

(12 分)

【問題二】(1) 設 $\{a_k\}$ 是各項均不為零的等差數列。試證:對於每一個大於 1 的正整數 n，下式恆成立:

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\cdots+\frac{1}{a_{n-1}a_n}=\frac{n-1}{a_1a_n}$$ 。 (6 分)

(2) 設 $\{a_k\}$ 是各項均不為零的實數數列,且對於每一個大於 1 的正整數 n，上式恆成立。試證:$\{a_k\}$ 必為等差數列。

(7 分)

【問題三】假設某公司連續 n 個月的營收都是正成長，其月增率分別為 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，這 n 個月的平均月增率為 $P=\sqrt[n]{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}-1$，而算術平均數 A 與幾何平均數 G 分別為 $A=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k$, $G=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$ 。
試證：$A \ge P \ge G$。 (12 分)

【問題四】如圖，設圓 P 與圓 Q 相交於兩點 X 與 Y，過點 X 作一對垂直線。若其中一直線與連心線 PQ、圓 P、圓 Q 分別交於點 A、B、C，另一直線與連心線 PQ、圓 P、圓 Q 分別交於點 D、E、F 且點 A、B、C、D、E、F、X、Y 均相異。

試證:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{DF}} \text{ 。}$$ (12 分)