一百零壹學年度高級中學數學科能力競賽複賽試題

南區（台南區）　　筆試（二）【參考解答】

一、【參考解答】:

由已知條件可得

$$\begin{cases} x+(-y)=z-5 \\ x(-y)=z^2-9z+20 \end{cases}$$

所以 x 和 $(-y)$ 可視為 t 的二次方程式 $t^2-(z-5)t+(z^2-9z+20)=0$ 的兩實根

故　判別式 $=(z-5)^2-4(z^2-9z+20)\ge 0$

$$\Rightarrow \quad 3z^2-26z+55\le 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{11}{3}\le z\le 5$$

因為 $x^2+y^2-5xy+75=(x-y)^2-3xy+75$

$$=(z-5)^2+3(z^2-9z+20)+75$$

$$=4(z-\frac{37}{8})^2+\frac{1191}{16}$$

所以當 $z=\frac{11}{3}$ 時 $x^2+y^2-5xy+75$ 有最大值 $\frac{703}{9}$

當 $z=\frac{37}{8}$ 時 $x^2+y^2-5xy+75$ 有最小值 $\frac{1191}{16}$

二、【參考解答】$n=2^{a_1}3^{a_2}5^{a_3}7^{a_4}\cdots p_n^{a_n}$ （質因數的乘績）

$(a_1+1)(a_2+1)(a_3+1)(a_4+1)\cdots\cdots(a_n+1)=315$

$a_2+1\ge 3$, $a_3+1\ge 2$, $a_4+1\ge 2$

因為 $3\times3\times5\times7=315$，所以 $n=2^6\times3^4\times5^2\times7^2$

三、【參考解答】令 $x=2a+b+c$ ， $y=a+2b+c$ ， $z=a+b+2c$

$$\frac{6a+9b+5c}{2a+b+c}+\frac{4a+3b+5c}{a+2b+c}+\frac{a+3b}{a+b+2c}=\frac{4y+x}{x}+\frac{x+2z}{y}+\frac{2y-z}{z}$$

$$= 4\frac{y}{x}+1+\frac{x}{y}+2\frac{z}{y}+2\frac{y}{z}-1$$

$$\geq 2\sqrt{4\frac{y}{x}\cdot\frac{x}{y}}+2\sqrt{4}=8$$

四、【參考解答】可利用向量的觀念來證明

設 $\vec{A}=(x,0),\ \vec{B}=(0,y),\ \vec{C}=\left(\frac{z}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}z\right)$，則

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{x^2+y^2}, \qquad \left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{\left(x-\frac{z}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}z\right)^2}=\sqrt{x^2+z^2-xz}$$

$$\left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{\left(\frac{z}{2}\right)^2+\left(y+\frac{\sqrt{3}}{2}z\right)^2}=\sqrt{y^2+z^2+\sqrt{3}yz}$$

故由 $\left|\overrightarrow{AB}\right|+\left|\overrightarrow{AC}\right|\geq\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{BC}\right|$，即證得不等式。 式中等號成立，

若且唯若， $\frac{-x}{\frac{z}{2}-x}=\frac{y}{-\frac{\sqrt{3}}{2}z} \Leftrightarrow x=\frac{yz}{2y+\sqrt{3}z}$ 。