

一百零壹學年度高級中學數學科能力競賽複賽試題

南區（台南區） 筆試（二） 編號：\_\_\_\_\_

注意事項：

- (1)時間分配：1 小時
- (2)本試卷共四題，滿分 21 分。第一題 5 分，第二題 5 分，第三題 5 分，第四題 6 分。
- (3)將計算、證明過程依序寫在答案卷上。
- (4)不可使用電算器。
- (5)試題與答案卷一同繳回。

一、已知實數  $x, y, z$  滿足 
$$\begin{cases} x+5=y+z \\ z^2+xy=9z-20 \end{cases},$$
 試求  $x^2+y^2-5xy+75$  的最大值及最小值。

二、設  $n$  為正整數，已知它是 315 的倍數且正因數的個數恰有 315，求  $n$  的最小值為何？

三、設  $a, b, c$  均為正實數，求  $\frac{6a+9b+5c}{2a+b+c} + \frac{4a+3b+5c}{a+2b+c} + \frac{a+3b}{a+b+2c}$  的最小值為何？

四、設  $x, y, z$  均為正實數，

求證： $\sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{x^2+z^2} - xz \geq \sqrt{y^2+z^2} + \sqrt{3}yz$ ，並試求不等式中等號成立的條件。