一百零壹學年度高級中學數學科能力競賽複賽試題

南區（台南區）　筆試（一）【參考解答】

一、【參考解答】

設題目中含有 k 條分數線的值為 $\dfrac{m_k}{n_k}$ 且 $(m_k, n_k)=1$，則

$$\frac{m_{k+1}}{n_{k+1}}=1+\frac{1}{\frac{m_k}{n_k}}=\frac{m_k+n_k}{m_k}$$

由 $(m_k, n_k)=1$，知 $(m_k+n_k, n_k)=1$，故可推得

$$m_{k+1}=m_k+n_k,\quad n_{k+1}=m_k，$$

即 $m_{k+1}=m_k+m_{k-1}$，$n_{k+1}=n_k+n_{k-1}$。

由於 $\dfrac{m_1}{n_1}=1+\dfrac{1}{1}$，$m_1=2$ 且 $n_1=1$，將它與費波那契數列(Fibonacci Sequence)：

$$F_1=1,\ F_2=1,\ F_{k+1}=F_k+F_{k-1}$$

比較，得知 $m_k=F_{k+2},\ n_k=F_{k+1}$。

故 所求之值為

$$m^2+mn-n^2=F_{2000}^2+F_{2000}\cdot F_{1999}-F_{1999}^2.$$

二、【參考解答】$\dfrac{x^2+6}{x}=\dfrac{z^2+6}{z}$

$$x^2z+6z=xz^2+6x,\qquad (x-z)(xz-6)=0$$

(i) $xz=6$

$xy+yz=0$，所以 $y=0$（不合）或 $x=-z$

$z^2=-6$，所以 $z=\pm\sqrt{6}i$，故 $x=\mp\sqrt{6}i$

$x=\sqrt{6}i$，$z=-\sqrt{6}i$，　帶入方程組得 $y=\pm\sqrt{6}i$

$x=-\sqrt{6}i$，$z=\sqrt{6}i$，　帶入方程組得 $y=\pm\sqrt{6}i$

(ii) $x=z$

$x^2+2xy=6$，由 $\dfrac{x^2+6}{4x}=\dfrac{y^2+6}{3y}$，得 $\dfrac{x+y}{2}=\dfrac{(x+y)^2}{3y}$

所以 $y=-x$ 或 $y=2x$

若 $y=-x$

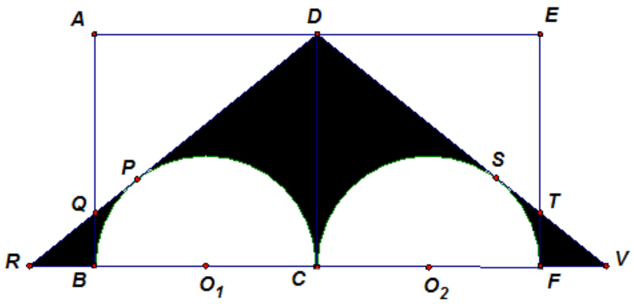
$x^2-2x^2=6$，$x=\pm\sqrt{6}i=z$，$xy=6$

$x=\sqrt{6}i$, $y=-\sqrt{6}i$, $z=\sqrt{6}i$ 或 $x=-\sqrt{6}i$, $y=\sqrt{6}i$, $z=-\sqrt{6}i$

若 $y=2x$

$x^2=\dfrac{6}{5}$，$x=\pm\dfrac{\sqrt{30}}{5}=z$，$y=\pm\dfrac{2\sqrt{30}}{5}$

三、.【參考解答】: 因題目所給圖形對 $\overline{CD}$ 成對稱圖形，故我們只需先求出正方形 $ABCD$ 這一面的黑色部分面積(左半邊黑色部分面積)，接著再將此值乘 2 倍即為所求黑色部分面積。



由切線性質知 $\overline{CD}=\overline{DP}$ 且 $\overline{BQ}=\overline{PQ}$

令 $\overline{BQ}=x>0$ 所以 $\overline{DQ}=\overline{DP}+\overline{PQ}=8+x$

$\overline{AQ}=\overline{AB}-\overline{BQ}=8-x$ 因為 ΔADQ 是直角三角形，利用畢式定理可得

$(8+x)^2=8^2+(8-x)^2$ 解之得 $\overline{BQ}=x=2$ $\overline{AQ}=6$

因為 $\Delta BQR \sim \Delta AQD$ 所以 $\overline{BR}=\dfrac{4}{3}\overline{BQ}=\dfrac{8}{3}$

$\therefore$ 左半邊黑色部分面積 $=\Delta CDR$面積$-$半圓面積

$$=\left(\frac{8}{3}+8\right)\times 8\times\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\times\pi\times 4^2=\frac{128}{3}-8\pi$$

故黑色部分面積$=2\times$左半邊黑色部分面積$=\dfrac{256}{3}-16\pi$

四、【參考解答】設此 9 個實數為 a_i, $i = 1, 2, ..., 9$

對每一個 a_i ，存在 $x_i \in (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ ，使得 $a_i = \tan x_i$

抽屜原理，一定有 x_i ， x_j 使得 $0 < x_i - x_j < \frac{\pi}{8}$

$0 < \tan(x_i - x_j) < \tan\frac{\pi}{8} = -1+\sqrt{2}$

即 $\tan(x_i - x_j) = \frac{\tan x_i - \tan x_j}{1+\tan x_i \tan x_j} = \frac{a-b}{1+ab}$