101 學年度台灣省第四區 (新竹高中)
高級中學數理及資訊學科能力競賽
數學科筆試 (二) 試題

編號：______________________ (學生自填)

注意事項：

1. 本試卷共七題填充題，滿分爲 21 分。
2. 考試時間：1 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將答案依序填寫在答案欄內。

問題：

1. 設 N,b 都是正整數。若 N 可以寫成

$$N = a_n \cdot b^n + a_{n-1} \cdot b^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot b^1 + a_0 \cdot b_0,$$

其中 n 爲非負整數，$0 \le a_i \le b-1$，$a_n \neq 0$，則稱 N 以 b 進位制的表示數爲 $a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0$。例如：

$$203 = 2^7 + 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 2^1 + 2^0,$$

所以 203 以 2 進位制的表示數爲 11001011。由此，得 203 以 3 進位制的表示數爲____(一)____。

2. 觀察下表 (每一行、每一列中的數字皆形成無窮等差數列)：

1	3	5	7	9	$\cdots$
3	6	9	12	15	$\cdots$
5	9	13	17	21	$\cdots$
7	12	17	22	27	$\cdots$
9	15	21	27	33	$\cdots$
11	18	25	32	39	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

上表中，2012 共出現____(二)____次。

(背面尚有試題)

3. 將不大於實數 x 的最大整數記爲 $[x]$。則滿足方程式

$$\left[\frac{n}{12}\right]=\left[\frac{n}{15}\right]+1$$

的正整數 n 共有 ___(三)___ 個。

4. 方程式 $3\cdot 2^x+1=y^2$ 之所有正整數解 (x,y) 爲 ___(四)___。

5. 設 x,y 皆爲實數，且 $x>y>0$。已知 $\dfrac{x+y}{2},\sqrt{xy},\dfrac{2xy}{x+y}$ 皆爲整數，且總和爲 49。則 $x=$ ___(五)___。

6. 考慮六條稜邊中有五條的長度爲 1 的四面體。這些四面體中，體積的最大值爲 ___(六)___。

7. 設三角形 $\triangle ABC$ 的面積爲 $10\sqrt{3}$，周長爲 20，且三內角滿足 $\angle B-\angle A=\angle C-\angle B$。則 $\triangle ABC$ 的三邊長爲 ___(七)___。

(試題結束)