101 學年度台灣省第四區 (新竹高中)
高級中學數理及資訊學科能力競賽
(數學科筆試一參考答案)

問題一： 圓上有100個點將圓周等分，任選其中三點皆可形成一個三角形。請問：這些三角形中，有幾個是「銳角三角形」？ (16 分)

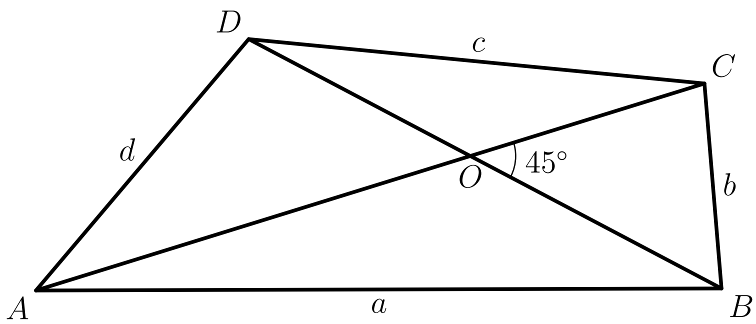
【證】 先計算鈍角與直角三角形的數目，鈍角與直角三角形的三點必落於半圓中。以最大角爲 $\left(180(1-\frac{k}{100})\right)^\circ$ 的鈍角三角形有 $100(k-1)$ 個 $(k=2,\ldots,49)$；而直角三角形有 $50\cdot 98=4900$ 個。故銳角三角形的個數爲

$$C_3^{100}-\sum_{k=2}^{49}100(k-1)-4900=39200.$$

□

問題二： 四邊形 $ABCD$ 的兩條對角線相交於 O 點，且 $\angle BOC=45^\circ$。設四邊形 $ABCD$ 的邊長依序爲 a,b,c,d，如圖所示。

試證：四邊形 $ABCD$ 的面積爲 $\dfrac{a^2-b^2+c^2-d^2}{4}$。 (16 分)



【證】 設 $\overline{OA}=x,\ \overline{OC}=y,\ \overline{OB}=m,\ \overline{OD}=n$，則依圖示，

$$\angle COD=135^\circ=\angle AOB,\quad \angle AOD=45^\circ=\angle BOC$$

所以，四邊形 $ABCD$ 的面積爲

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}xm\sin 135^\circ+\frac{1}{2}ym\sin 45^\circ+\frac{1}{2}yn\sin 135^\circ+\frac{1}{2}xn\sin 45^\circ\\ =\ &\frac{1}{2}(xm+ym+yn+xn)\sin 45^\circ\end{aligned}$$

另外，由餘弦定理可知

$$\begin{aligned} x^2+m^2+2xm\cos 45^\circ &= a^2 && (1)\\ m^2+y^2-2my\cos 45^\circ &= b^2 && (2)\\ y^2+n^2+2yn\cos 45^\circ &= c^2 && (3)\\ n^2+x^2-2nx\cos 45^\circ &= d^2 && (4) \end{aligned}$$

將 (1)−(2)+(3)−(4) 得到

$$2(xm+ym+yn+xn)\cos 45^\circ = a^2-b^2+c^2-d^2$$

又因爲 $\cos 45^\circ = \sin 45^\circ$，故面積等於 $\dfrac{a^2-b^2+c^2-d^2}{4}$。 □

問題三： 設 x,y,z 爲正實數。試證：

$$\frac{1}{3} < \frac{x}{3x+y+z} + \frac{y}{x+3y+z} + \frac{z}{x+y+3z} \le \frac{3}{5}.$$

(17 分)

【證】 令 $K = \frac{x}{3x+y+z} + \frac{y}{x+3y+z} + \frac{z}{x+y+3z}$，且 $S = x+y+z$。則

$$K = \frac{x}{S+2x} + \frac{y}{S+2y} + \frac{z}{S+2z} = \frac{1}{2}\left[3 - S\left(\frac{1}{S+2x} + \frac{1}{S+2y} + \frac{1}{S+2z}\right)\right].$$

先證 $K \le \dfrac{3}{5}$。此敍述等價於

$$S\left(\frac{1}{S+2x} + \frac{1}{S+2y} + \frac{1}{S+2z}\right) \ge \frac{9}{5}.$$

因爲 $5S = (S+2x)+(S+2y)+(S+2z)$，且由柯西不等式知

$$\Big[(S+2x)+(S+2y)+(S+2z)\Big]\cdot\left[\frac{1}{S+2x} + \frac{1}{S+2y} + \frac{1}{S+2z}\right] \ge (1+1+1)^2 = 9,$$

故此半邊的不等式得證。
另外半邊 $K > \dfrac{1}{3}$ 等價於不等式

$$S\left(\frac{1}{S+2x} + \frac{1}{S+2y} + \frac{1}{S+2z}\right) < \frac{7}{3}.$$

由齊次性，不妨設 $S = x+y+z = 1$。因此欲證之不等式是

$$\frac{1}{1+2x} + \frac{1}{1+2y} + \frac{1}{1+2z} < \frac{7}{3}, \quad 0 < x,y,z < 1,\ x+y+z = 1.$$

設 k 爲上面不等式的左手邊。利用 y,z 非負，且 $y+z=1-x$，得

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+2y}+\frac{1}{1+2z}&=\frac{(1+2y)+(1+2z)}{(1+2y)(1+2z)}\\&=\frac{2+2y+2z}{1+2y+2z+4yz}=\frac{4-2x}{3-2x+4yz}<\frac{4-2x}{3-2x}.\end{aligned}$$

所以

$$k<\frac{1}{1+2x}+\frac{4-2x}{3-2x}=\frac{7+4x-4x^2}{3+4x-4x^2}=1+\frac{4}{3+4x-4x^2}.$$

函數 $f(x)=3+4x-4x^2$ 滿足

$$3<f(x)<4,\qquad 0<x<1.$$

故得

$$k<1+\frac{4}{3}=\frac{7}{3}.$$

得證。 □

註：$K>\frac{1}{3}$ 亦可由以下方式證得：

$$\begin{aligned}K&=\frac{x}{3x+y+z}+\frac{y}{x+3y+z}+\frac{z}{x+y+3z}\\&>\frac{x}{3x+3y+3z}+\frac{y}{3x+3y+3z}+\frac{z}{3x+3y+3z}\\&=\frac{x+y+z}{3x+3y+3z}=\frac{1}{3}.\end{aligned}$$