101 學年度台灣省第四區 (新竹高中)
高級中學數理及資訊學科能力競賽
(數學科口試參考答案)

【口試一】將 $(1+2x)^{2012}$ 展開集項後，係數最大者爲 x 的幾次方項？

【解】1341, 1342.
設 x^n 的係數爲最大，則有不等式

$$C_n^{2012}2^n \geq C_{n+1}^{2012}2^{n+1} \qquad \text{且} \qquad C_n^{2012}2^n \geq C_{n-1}^{2012}2^{n-1}.$$

將兩式化簡，可得聯立不等式

$$\frac{1}{2012-n} \geq \frac{2}{n+1} \qquad \text{且} \qquad \frac{2}{n} \geq \frac{1}{2013-n}.$$

又 $n \in \mathbb{N}$，所以 $n = 1341, 1342$，即 x^{1341} 與 x^{1342} 項係數最大。 □

【口試二】設 Γ 是銳角三角形 $\triangle ABC$ 的外接圓。將 Γ 對直線 BC 作鏡射，得一圓 O。試證：圓 O 通過 $\triangle ABC$ 的垂心。

【證】由 C 點對 AB 邊作高，設垂足爲 D，交圓 O 於 H。設直線 BH 交直線 AC 於點 E。設 A 點對 BC 邊的反射點爲 A'，有 $\angle BAC = \angle BA'C$。因爲 $BHCA'$ 共圓，$\angle BA'C$ 與 $\angle BHC$ 互補，所以 $\angle BA'C = \angle BHD = 90^\circ - \angle DBH$ ($\angle D$ 爲直角)。所以在 $\triangle ABE$ 中，$\angle BAE = \angle BAC$ 與 $\angle ABE = \angle DBH$ 互餘，所以 $BE \perp AE$，也就是 BE 爲 AC 邊上的高。所以 H 爲兩高之交點，$\triangle ABC$ 的垂心。 □