101 學年度台灣省第二區(新店高中)

高級中學數理及資訊學科能力競賽

數學科筆試（一）試題【參考解答】

問題一： 給定正整數 m, n，其中 $m \geq 2n+3$。假設袋子中有 m 個白球(W)及 n 個黑球(B)，每次取一球，取出的球由左而右排成一列，直到連續取到 3 個白球，即停止取球。設隨機變數 $X_{m,n}$ 表示被取到的白球中，恰好是 2 白球(WW)連接一起的次數，例如：若被取到的 16 個球依序為

$$W,\ B,\ W,\ W,\ B,\ B,\ B,\ W,\ W,\ B,\ W,\ W,\ B,\ W$$

則有 3 次恰好出現連接的 2 個白球，此時隨機變數 $X_{m,n}$ 的值為 3。

(1) 試求 $X_{5,1}$ 及 $X_{7,2}$ 的數學期望值。

(2) 試求 $X_{101,45}$ 的數學期望值。

【解】顯然，對 $m \geq 3$，期望值 $E(X_{m,0}) = 0$。考慮開始取到球的四種可能情況：B, WB, WWB, WWW，其發生的機率分別 $P(B), P(WB), P(WWB), P(WWW)$。其中，最後一種情況(即一開始就出現 WWW)不會有連接一起的 2 白球，於是，

對 $m \geq 5$，

$$E(X_{m,1}) = P(B)E(X_{m,0}) + P(WB)E(X_{m-1,0}) + P(WWB)(1+E(X_{m-2,0}))$$

$$= \frac{1}{m+1}\cdot 0 + \frac{m}{m+1}\cdot\frac{1}{m}\cdot 0 + \frac{m}{m+1}\cdot\frac{m-1}{m}\cdot\frac{1}{m-1}\cdot(1+0) = \frac{1}{m+1}$$ 。

同理，對 $m \geq 7$，可得

$$E(X_{m,2}) = P(B)E(X_{m,1}) + P(WB)E(X_{m-1,1}) + P(WWB)(1+E(X_{m-2,1}))$$

$$= \frac{2}{m+2}\cdot\frac{1}{m+1} + \frac{m}{m+2}\cdot\frac{2}{m+1}\cdot\frac{1}{m} + \frac{m}{m+2}\cdot\frac{m-1}{m+1}\cdot\frac{2}{m}\cdot(1+\frac{1}{m-1}) = \frac{2}{m+1}$$ 。

因此，猜測：對正整數 $m \geq 2n+3$，恆有 $E(X_{m,n}) = \frac{n}{m+1}$ 。

以下對 $n = 0, 1, 2, \cdots$ 作數學歸納法：假設 $E(X_{m,n}) = \frac{n}{m+1}$ 都成立，則可推得

$$E(X_{m,n+1}) = P(B)E(X_{m,n}) + P(WB)E(X_{m-1,n}) + P(WWB)(1+E(X_{m-2,n}))$$

$$= \frac{n+1}{m+n+1}\cdot\frac{n}{m+1} + \frac{m}{m+n+1}\cdot\frac{n+1}{m+n}\cdot\frac{n}{m} + \frac{m}{m+n+1}\cdot\frac{m-1}{m+n}\cdot\frac{n+1}{m+n-1}\cdot(1+\frac{n}{m-1})$$

$$= \frac{n+1}{m+n+1}\left(\frac{n}{m+1} + \frac{n}{m+n} + \frac{m}{m+n}\right) = \frac{n+1}{m+n+1}\left(\frac{n}{m+1} + 1\right) = \frac{n+1}{m+1}$$ 。

因此，所求 $X_{101,45}$ 的數學期望值 $E(X_{101,45})=\frac{45}{102}=\frac{15}{34}$。

問題二： 設 $\sin\theta=\frac{2ab}{a^2+b^2}$，其中 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$，$a,\ b$ 為兩相異正整數且 $A_n=(a^2+b^2)^n\sin n\theta$。試證：對任意正整數 n，A_n 均為整數。

【証明】：

解 1

令 $B_n=(a^2+b^2)^n\cos n\theta$ 。

當 $n=1$ 時，$A_1=2ab,\ B_1=a^2-b^2$ 均為整數。(假設 $a>b$)

由 $\sin(k+1)\theta=\sin k\theta\cos\theta+\sin\theta\cos k\theta,$

$\cos(k+1)\theta=\cos k\theta\cos\theta-\sin k\theta\sin\theta$

得到關係式 $A_{k+1}=A_kB_1+B_kA_1$ 和 $B_{k+1}=B_kB_1-A_kA_1$。

利用數學歸納法證明 A_n 和 B_n 均為整數。

解 2 可設 $a>b$。由 $\sin\theta=\frac{2ab}{a^2+b^2}$，得到 $\cos\theta=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$。

$A_1=(a^2+b^2)\sin\theta=2ab$ 為整數。

利用棣美弗定理，得知 $\sin n\theta$ 是 $(\cos\theta+i\sin\theta)^n$ 的虛數部分。

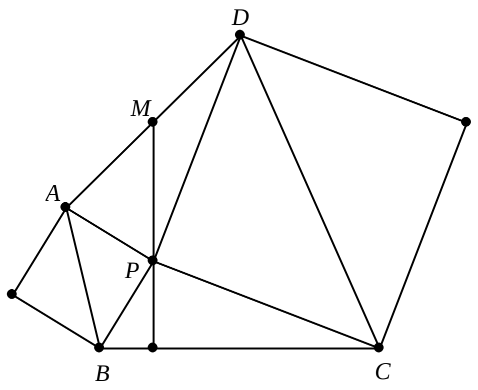
因此，$A_n=(a^2+b^2)^n\sin n\theta$ 剛好是 $(a^2+b^2)^n(\cos\theta+i\sin\theta)^n$ 的虛數部分。

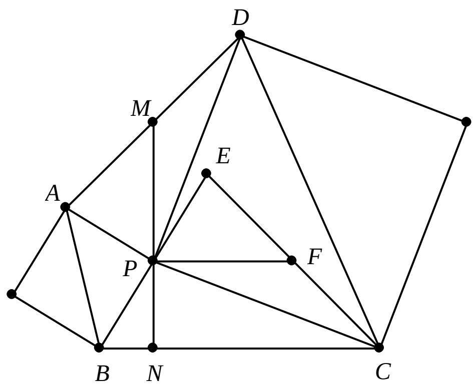
又 $(a^2+b^2)^n(\cos\theta+i\sin\theta)^n=(a^2-b^2+2abi)^n=(a+bi)^{2n}$，

由二項式定理得知其虛數部分為 $\sum_{k=1}^{n}C_{2k-1}^{2n}a^{2n-2k+1}(-1)^{k+1}b^{2k-1}$，

顯然是一個整數，因此得證。

問題三： 如圖，在凸四邊形 $ABCD$ 中，分別以 $\overline{AB}$ 與 $\overline{CD}$ 為一對角線的兩正方形有一共同的頂點 P 位於四邊形 $ABCD$ 的內部。試證：過點 P 與 $\overline{AD}$ 中點 M 的直線 PM 必與直線 BC 垂直。





【証明】： 在直線 BP 上作點 E 使得點 P 成為 $\overline{BE}$ 的中點，再連接 $\overline{CE}$ 。在 $\triangle APD$ 與 $\triangle EPC$ 中，因為 $\overline{AP}=\overline{BP}=\overline{EP}$ 、 $\overline{PD}=\overline{PC}$ 而且

$$\angle APD=\angle APE-\angle DPE=90^\circ-\angle DPE=\angle DPC-\angle DPE=\angle EPC\text{，}$$

所以，$\triangle APD$ 與 $\triangle EPC$ 全等。

設 $\overline{EC}$ 的中點為 F。因為 M 是 $\overline{AD}$ 的中點而且 $\triangle APD$ 與 $\triangle EPC$ 全等，所以，$\triangle APM$ 與 $\triangle EPF$ 全等。於是，得

$$\angle MPF=\angle MPE+\angle EPF=\angle MPE+\angle APM=\angle APE=90^\circ\text{。}$$

亦即：直線 PM 與直線 PF 垂直。另一方面，因為點 P 與點 F 分別是 $\triangle EBC$ 中邊 $\overline{BE}$ 與邊 $\overline{CE}$ 的中點，所以，直線 PF 與直線 BC 平行。於是，直線 PM 與直線 BC 垂直。