

101 學年度台灣省第二區(新店高中)
高級中學數理及資訊學科能力競賽

數學科筆試(一) 試題

編號：_____ (學生自填)

注意事項：

1. 本試卷共三題計算證明題，滿分為 49 分。
2. 考試時間：2 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將過程依序填寫在答案卷內。

問題一：給定正整數 m, n ，其中 $m \geq 2n + 3$ 。假設袋子中有 m 個白球(W)及 n 個黑球(B)，每次取一球，取出的球由左而右排成一列，直到連續取到 3 個白球，即停止取球。設隨機變數 $X_{m,n}$ 表示被取到的白球中，恰好是 2 白球(WW)連接一起的次數，例如：若被取到的 16 個球依序為

$W, B, W, W, B, B, B, W, W, B, W, W, B, W$

則有 3 次恰好出現連接的 2 個白球，此時隨機變數 $X_{m,n}$ 的值為 3。

- (1) 試求 $X_{5,1}$ 及 $X_{7,2}$ 的數學期望值。(8 分)
- (2) 試求 $X_{101,45}$ 的數學期望值。(8 分)

問題二：設 $\sin \theta = \frac{2ab}{a^2 + b^2}$ ，其中 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ， a, b 為兩相異正整數且

$A_n = (a^2 + b^2)^n \sin n\theta$ 。試證：對任意正整數 n ， A_n 均為整數。(16 分)

問題三：如圖，在凸四邊形 $ABCD$ 中，分別以 \overline{AB} 與 \overline{CD} 為一對角線的兩正方形有一共同的頂點 P 位於四邊形 $ABCD$ 的內部。試證：過點 P 與 \overline{AD} 中點 M 的直線 PM 必與直線 BC 垂直。(17 分)

