101 學年度台灣省第二區(新店高中)
高級中學數理及資訊學科能力競賽
數學科口試試題【參考解答】

【試題一】設 m, n 為正整數，且 $m \le 2^n - 1$。試證：$C_m^{2^n-1}$ 必為奇數。

【參考解答】

$$C_m^{2^n-1} = \frac{2^n-1}{1} \cdot \frac{2^n-2}{2} \cdot \frac{2^n-3}{3} \cdot \frac{2^n-4}{4} \cdots$$

觀察每個分數 $\dfrac{2^n-k}{k}$，其中 k 可寫為 $2^i a$，a 為奇數，而 2^i 都會被約掉，

$$\frac{2^n-k}{k} = \frac{2^n-2^i a}{2^i a} = \frac{2^{n-i}-a}{a}$$

因此 $C_m^{2^n-1}$ 分子分母中所有的偶數因數都會被約掉，所以必為奇數。

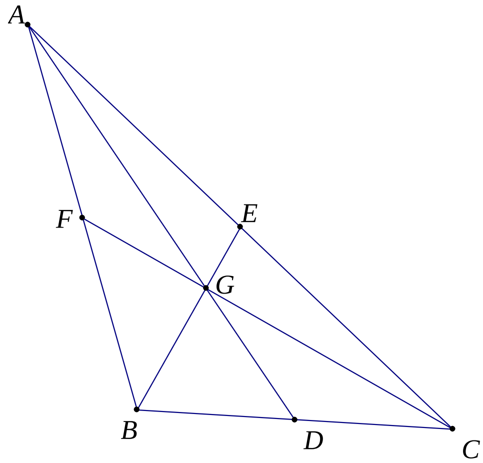
【試題二】設 ΔABC 三中線 $\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$ 交於點 G (即點 G 為 ΔABC 的重心)。

若 ΔBDG 是一個邊長為 2 的正三角形，求 ΔABC 的周長。

【參考解答】

首先我們證明 $\overline{BE} \perp \overline{CF}$。如圖所示，因為點 D 為 $\overline{BC}$ 的中點，所以 $\overline{DC} = \overline{BD} = 2$。

由於 ΔBDG 為正三角形，所以 $\angle BDG = 60^\circ$，因而 $\angle GDC = 120^\circ$。因為 $\overline{GD} = \overline{DC}$，所以 ΔGDC 為等腰三角形。由此可得 $\angle DCG = \angle CGD = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ$，因而 $\angle BGC = \angle BGD + \angle DGC = 90^\circ$。故，$\overline{BE} \perp \overline{CF}$。



$\overline{AB} = 2\overline{FB} = 2\sqrt{\overline{BG}^2 + \overline{GF}^2}$，$\overline{BC} = 4$，

$\overline{CA} = 2\overline{EC} = 2\sqrt{\overline{GC}^2 + \overline{GE}^2}$。

$\overline{GC} = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{BG}^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$。

因為點 G 為重心，所以 $\overline{GF} = \dfrac{\overline{GC}}{2}$，$\overline{GE} = \dfrac{\overline{BG}}{2}$。

因此，$\overline{AB} = 2\sqrt{\overline{BG}^2 + \overline{GF}^2} = 2\sqrt{2^2 + (\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{7}$，

$\overline{CA} = 2\sqrt{\overline{GC}^2 + \overline{GE}^2} = 2\sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2\sqrt{13}$。

故，ΔABC 的周長為 $4 + 2\sqrt{7} + 2\sqrt{13}$。