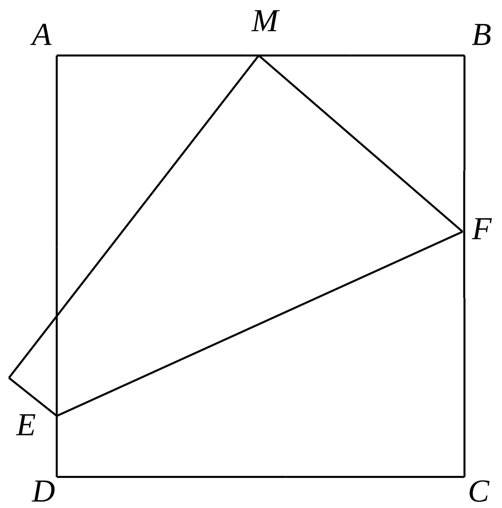
101 學年度台灣省(花蓮區)

高級中學數理及資訊學科能力競賽

數學科筆試（一）【參考解答】

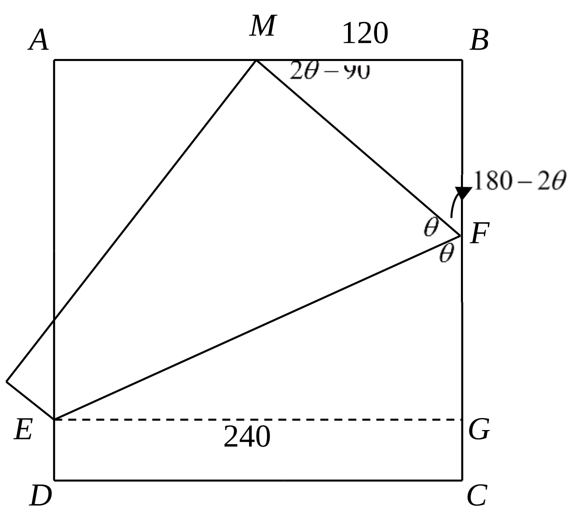
問題一： 將長 $\overline{AB}=240$，寬 $\overline{BC}=288$ 的長方形紙張對摺，讓頂點 C 剛好落在線段 $\overline{AB}$ 的中點 M 上，如下圖所示：



若 $\overline{EF}$ 是摺線，則摺線 $\overline{EF}$ 的長度為多少？

（10 分）

【解答】： 260



如右圖所示，設 $\angle EFC=\theta$。

因為對折，所以 $\angle EFM=\theta$，

即 $\angle MFB=180-2\theta$，

推得 $\angle FMB=2\theta-90$。

過 E 點做水平線 $\overline{EG}$ 交 $\overline{BC}$ 於 G 點。

因為 $\overline{AB}=240$，又 M 為 $\overline{AB}$ 的中點，

所以 $\overline{MB}=120$，$\overline{EG}=\overline{AB}=240$。

由直角三角形 EFG 知

$\sin\theta=\dfrac{\overline{EG}}{\overline{EF}}=\dfrac{240}{\overline{EF}}$，即 $\overline{EF}=\dfrac{240}{\sin\theta}$。

又由題意知

$$288=\overline{BC}=\overline{BF}+\overline{FC}=\overline{BF}+\overline{FM}=\frac{120}{\cos(2\theta-90)}+120\tan(2\theta-90)$$

$$=\frac{120}{\sin 2\theta}-120\cot 2\theta$$

$$=120\frac{1-\cos 2\theta}{\sin 2\theta}$$

$$=120\frac{2\sin^2\theta}{2\sin\theta\cos\theta}$$

$$=120\tan\theta$$

解得 $\tan\theta=\frac{12}{5}$ ，即 $\sin\theta=\frac{12}{13}$ 。

將 $\sin\theta=\frac{12}{13}$ 代入 $\overline{EF}=\frac{240}{\sin\theta}$ ，得

$$\overline{EF}=\frac{240}{\sin\theta}=240\times\frac{13}{12}=260\text{ 。}$$

問題二： 設數列 $\langle a_n\rangle$ 滿足遞迴關係式

$$a_1=\sqrt{6},\ \ a_{n+1}=\sqrt{6+a_n},\ \ (n\geq 1).$$

(1)利用數學歸納法證明：對任何正整數 n ，不等式

$$a_n\leq 3$$

恆成立。

(2)證明：對任何正整數 n ，不等式

$$a_{n+1}\geq a_n>0$$

恆成立。

（12 分）

【證明】： (1)當 $n=1$ 時，不等式 $a_1=\sqrt{6}\leq\sqrt{9}=3$ 成立。

設 $n=k$ 時，不等式 $a_k\leq 3$ 成立，

則當 $n=k+1$ 時，由遞迴關係知

$$a_{k+1}=\sqrt{6+a_k}\ .$$

利用 $a_k\leq 3$ 得

$$a_{k+1}=\sqrt{6+a_k}\leq\sqrt{6+3}=3.$$

由數學歸納法得證：對任何正整數n，不等式

$$a_n \le 3$$

恆成立。

(2)由遞迴關係知

$$a_{n+1} = \sqrt{6+a_n} \Rightarrow a_{n+1}^2 = 6 + a_n .$$

將a_{n+1}^2與a_n^2相減，得

$$a_{n+1}^2 - a_n^2 = (6+a_n) - a_n^2 = (3-a_n)(2+a_n) .$$

因為$0 < a_n \le 3$，所以$2+a_n > 0$及$3-a_n \ge 0$，即

$$a_{n+1}^2 - a_n^2 \ge 0 ,$$

故對任何正整數n，不等式

$$a_{n+1} \ge a_n .$$

恆成立。

問題三： 甲、乙、丙三個隊伍在運動會的獎牌榜上共得 186 塊獎牌！甲隊贏得了最多的金牌，乙隊贏得的金牌和銅牌數相等；甲隊和乙隊贏得的銀牌數相等。丙隊的銀牌比銅牌多了 2 塊；而丙隊的金牌數比甲隊的銅牌數多了 1 塊。甲隊的金牌數和乙、丙兩隊的銅牌數之和相等，也剛好是乙隊獎牌數的四分之三。三隊所贏得的總金牌數比甲隊獎牌數少 1 塊。請問甲、乙、丙三隊各贏得金、銀與銅牌各幾塊？

（12 分）

【解答】： 設甲隊得a塊銀牌、乙隊得b塊金牌、丙隊得c塊銅牌及甲隊得d塊銅牌。根據題意可以整理各隊獎牌數如下表

	金牌	銀牌	銅牌
甲隊	$b+c$	a	d
乙隊	b	a	b
丙隊	$d+1$	$c+2$	c

又根據題意，得

$$\begin{cases} \text{總獎牌數} & = 186 \\ b+c & = \frac{3(a+2b)}{4} \\ (b+c)+(d+1)+b & = (b+c)+a+d-1 \end{cases}$$

整理得

$$\begin{cases} 2a+3b+3c+2d & = 186 \\ 4c & = 3a+2b \\ b & = a-2 \end{cases}$$

可以解得c,d為

$$c=\frac{5a}{4}-1,\ \ d=96-\frac{35a}{8}.$$

因為d必須是非負整數，所以a是 8 的倍數，而且$a<22$，即

$$a=8,\ 或\ \ a=16.$$

因此

$$(a,b,c,d)=(8,6,9,61)\quad 或\quad (16,14,19,26).$$

因為甲隊得最多金牌數，所以$b+c>d+1$，所以前者不合，故各隊獎牌數如下表

	金牌	銀牌	銅牌
甲隊	33	16	26
乙隊	14	16	14
丙隊	27	21	19

問題四：(1) 設$\alpha,\beta,\alpha_1,\beta_1$均為$0^\circ$與$180^\circ$之間的角度使得$\alpha+\beta=\alpha_1+\beta_1$。若

$|\alpha-\beta|<|\alpha_1-\beta_1|$，證明$\sin\alpha+\sin\beta>\sin\alpha_1+\sin\beta_1$。

(2) 設α,β,γ均為0°與180°之間的角度。證明

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\le 3\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\ 。$$

（12 分）

【證明】：(1)由三角函數積化和差知

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\sin\alpha_1+\sin\beta_1=2\sin\frac{\alpha_1+\beta_1}{2}\cos\frac{\alpha_1-\beta_1}{2}\ 。$$

則$\left(\sin\alpha+\sin\beta\right)-\left(\sin\alpha_1+\sin\beta_1\right)$

$$=\left(2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)-\left(2\sin\frac{\alpha_1+\beta_1}{2}\cos\frac{\alpha_1-\beta_1}{2}\right)$$

$$=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha_1-\beta_1}{2}\right)$$

因為$\alpha,\beta,\alpha_1,\beta_1$均為$0^\circ$與$180^\circ$之間的角度，

所以$0<\dfrac{\alpha+\beta}{2}<\dfrac{180+180}{2}=180^\circ$，

$$\left|\frac{\alpha-\beta}{2}\right|<\frac{180}{2}=90^\circ,$$

$$\left|\frac{\alpha_1-\beta_1}{2}\right|<\frac{180}{2}=90^\circ。$$

又 $\alpha+\beta=\alpha_1+\beta_1$，則 $\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=\sin\frac{\alpha_1+\beta_1}{2}>0$。

$|\alpha-\beta|<|\alpha_1-\beta_1|$，即 $\left|\frac{\alpha-\beta}{2}\right|<\left|\frac{\alpha_1-\beta_1}{2}\right|$，

依餘弦函數性質可得

$$\cos\frac{\alpha-\beta}{2}>\cos\frac{\alpha_1-\beta_1}{2}$$

由上述可知

$$\begin{aligned}&(\sin\alpha+\sin\beta)-(\sin\alpha_1+\sin\beta_1)\\&=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha_1-\beta_1}{2}\right)>0\end{aligned}$$

即

$$\sin\alpha+\sin\beta>\sin\alpha_1+\sin\beta_1。$$

(2) α,β,γ 均為 $0°$ 與 $180°$ 之間的角度，

已知 $\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha+\beta}{2}=\alpha+\beta$，

$$\left|\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha+\beta}{2}\right|<|\alpha-\beta|,$$

由(1)可得

$$\sin\frac{\alpha+\beta}{2}+\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\ge\sin\alpha+\sin\beta,$$

即 $\sin\alpha+\sin\beta\le2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$ ……①

同理可得

$$\sin\gamma+\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\le2\sin\frac{\gamma+\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}}{2}\qquad\cdots\cdots②$$

將①②相加得

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma+\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\le 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}+2\sin\frac{\gamma+\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}}{2}$$

$$=2\left(\sin\frac{\alpha+\beta}{2}+\sin\frac{\gamma+\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}}{2}\right)$$

由上述可知

$$\sin\frac{\alpha+\beta}{2}+\sin\frac{\gamma+\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}}{2}\le 2\sin\frac{\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\gamma+\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}}{2}}{2}$$

$$=2\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$$

整理可得

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma+\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\le 2\times 2\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$$

$$=4\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$$

即

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\le 3\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$$ 。