

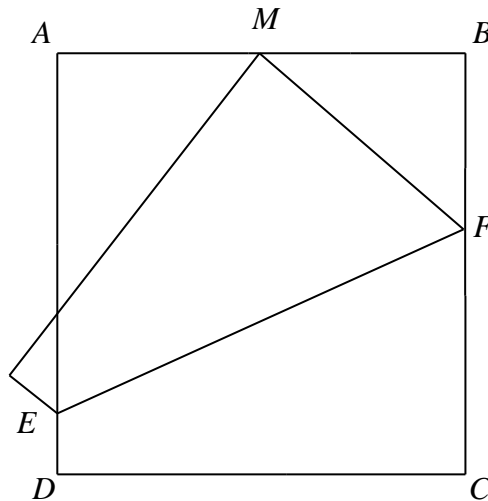
101 學年度台灣省(花蓮區)
高級中學數理及資訊學科能力競賽
數學科筆試(一) 試題

編號：_____ (學生自填)

注意事項：

1. 本試卷共四題計算證明題，滿分為 46 分。
2. 考試時間：2 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將過程依序填寫在答案卷內。

問題一：將長 $\overline{AB} = 240$ ，寬 $\overline{BC} = 288$ 的長方形紙張對摺，讓頂點 C 剛好落在線段 \overline{AB} 的中點 M 上，如下圖所示：



若 \overline{EF} 是摺線，則摺線 \overline{EF} 的長度為多少？

(10 分)

問題二：設數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足遞迴關係式

$$a_1 = \sqrt{6}, a_{n+1} = \sqrt{6+a_n}, (n \geq 1).$$

(1)利用數學歸納法證明：對任何正整數 n ，不等式

$$a_n \leq 3$$

恆成立。

(2)證明：對任何正整數 n ，不等式

$$a_{n+1} \geq a_n > 0$$

恆成立。

(12分)

問題三：甲、乙、丙三個隊伍在運動會的獎牌榜上共得 186 塊獎牌！甲隊贏得了最多的金牌，乙隊贏得的金牌和銅牌數相等；甲隊和乙隊贏得的銀牌數相等。丙隊的銀牌比銅牌多了 2 塊；而丙隊的金牌數比甲隊的銅牌數多了 1 塊。甲隊的金牌數和乙、丙兩隊的銅牌數之和相等，也剛好是乙隊獎牌數的四分之三。三隊所贏得的總金牌數比甲隊獎牌數少 1 塊。請問甲、乙、丙三隊各贏得金、銀與銅牌各幾塊？

(12分)

問題四：(1)設 $\alpha, \beta, \alpha_1, \beta_1$ 均為 0° 與 180° 之間的角度使得 $\alpha + \beta = \alpha_1 + \beta_1$ 。若

$$|\alpha - \beta| < |\alpha_1 - \beta_1|, \text{證明 } \sin \alpha + \sin \beta > \sin \alpha_1 + \sin \beta_1。$$

(2)設 α, β, γ 均為 0° 與 180° 之間的角度。證明

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma \leq 3 \sin \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3}。$$

(12分)