# 一百零壹學年度高級中學數學科能力競賽複賽試題
## 南區（高雄區）　　筆試（二）{參考解答}

一、【參考解答】 $f(x+15)\geq f(x+12)+3\geq\cdots\geq f(x)+15$

$f(x+15)\leq f(x+12)+3\leq\cdots\leq f(x)+15$

$f(x+15)=f(x)+15$

$f(2012)=f(512+100\times 15)=f(512)+1500=2132$

二、【參考解答】

$10\cos x-3=3\sin x$

$109\cos^2 x-60\cos x=0$

$\cos x=\dfrac{60}{109}$ 或 0 故 $\sin x=\dfrac{91}{109}$ 或 -1

$\dfrac{169}{109}n=\dfrac{91}{109}m$，$m=13$，$n=7$，$m+n=20$

$n=-m$ （不合）

三、【參考解答】

(1) 若可將 $X$ 分割為兩個不相交的子集合 $A$ 及 $B$，且 $A$ 中的數字之和等於 $B$ 中的數字之和，則 $X$ 中的數字總和 $2012(k+1)+\dfrac{k(k+1)}{2}$ 必為偶數。即 4 可整除 $k(k+1)$。故 k 除以 4 必不餘 1 或 2。

(2) 若 k 除以 4 餘 3 時，$X$ 的元素個數為 4 的倍數，可將 $X$ 中除以 4 餘 0 或 3 的數字收集在子集合 $A$ 而將 $X$ 中除以 4 餘 1 或 2 的數字收集在子集合 $B$。可知 $A$ 中的數字之和等於 $B$ 中的數字之和。

四、【參考解答】：$n$=1: $\dfrac{1}{1+2}-\dfrac{1}{2+2}=\dfrac{1}{12}$ 成立

設 $n$=$k$ 成立: $\dfrac{1}{a_k+2}-\dfrac{1}{b_k+2}=\dfrac{1}{12}$

$n$=$k$+1:

$$\frac{1}{a_{k+1}+2}-\frac{1}{b_{k+1}+2}=\frac{1}{\frac{4+2a_k+a_kb_k}{b_k}+2}-\frac{1}{\frac{4+2a_k+a_kb_k}{b_k}+2}$$

$$=\frac{b_k}{(a_k+2)(b_k+2)}-\frac{a_k}{(a_k+2)(b_k+2)}=\frac{b_k-a_k}{(a_k+2)(b_k+2)}\quad \text{成立}$$

$$=\frac{1}{a_k+2}-\frac{1}{b_k+2}=\frac{1}{12}$$

所以，$\dfrac{1}{a_{2012}+2}=\dfrac{1}{b_{2012}+2}+\dfrac{1}{12}>\dfrac{1}{12},a_{2012}+2<12$

$a_{2012}<10$ 。