

一百零壹學年度高級中學數學科能力競賽複賽試題

南區（高雄區） 筆試（二） 編號：_____

注意事項：

- (1)時間分配：1 小時
- (2)本試卷共四題，滿分 21 分。第一題 5 分，第二題 5 分，第三題 5 分，第四題 6 分，
- (3)將計算、證明過程依序寫在答案卷上。
- (4)不可使用電算器。
- (5)試題與答案卷一同繳回。

一、設 $f(x)$ 為實函數且滿足對任意實數 x 均有 $f(x+3) \geq f(x)+3$ ， $f(x+5) \leq f(x)+5$ ，
已知 $f(512) = 632$ ，求 $f(2012)$ 之值？

二、已知 $3(1 + \sin x) = 10 \cos x$ ，設 m, n 為正整數 $(n, m) = 1$ 且 $n(1 + \cos x) = m \sin x$
求 $m+n$ 之值？

三、設集合 $X = \{2012, 2012 + 1, 2012 + 2, \dots, 2012 + k\}$

- (1) 當 k 除以 4 餘 1 或 2 時，證明無法將集合 X 分割為兩個不相交的子集合 A 及 B ，且子集合 A 中的數字之和等於子集合 B 中的數字之和。
- (2) 當 k 除以 4 餘 3 時，證明能將集合 X 分割為兩個不相交的子集合 A 及 B ，且子集合 A 中的數字之和等於子集合 B 中的數字之和。

四、數列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 滿足 $a_1 = 1$ ， $b_1 = 2$ ， $a_{n+1} = \frac{4+2a_n+a_nb_n}{b_n}$ ， $b_{n+1} = \frac{4+2b_n+a_nb_n}{a_n}$

求證： $a_{2012} < 10$ （提示：先證 $\frac{1}{a_n+2} - \frac{1}{b_n+2} = \frac{1}{12}$ ）