一百零壹學年度高級中學數學科能力競賽複賽試題

南區（高雄區）　筆試（一）{參考解答}

一、【參考解答】

(1)首先可依條件知 a_n 皆不為 0。

原關係式可推出 $\dfrac{a_{n+2}}{a_{n+1}{}^2+1}=\dfrac{a_n}{a_n{}^2+1}$

$$\frac{a_{n+2}a_{n+1}}{a_{n+1}{}^2+1}=\frac{a_n a_{n+1}}{a_n{}^2+1}$$

$$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}+1/a_{n+1}}=\frac{a_{n+1}}{a_n+1/a_n}=\frac{a_n}{a_{n-1}+1/a_{n-1}}=\cdots=\frac{a_2}{a_1+1/a_1}=\frac{2}{1+1}=1$$

即 $a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{a_n}$ 。

(2) 由 $a_1=1$ 及 $a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{a_n}$ 可知 $a_{n+1}\geq 1$，即 $0<\dfrac{1}{a_n{}^2}\leq 1$ 。

且 $2<a_n{}^2-a_{n-1}{}^2=\dfrac{1}{a_{n-1}{}^2}+2\leq 3$

$2<a_{n-1}{}^2-a_{n-2}{}^2\leq 3$

$2<a_{n-2}{}^2-a_{n-3}{}^2\leq 3$

……

$2<a_3^2-a_2^2\leq 3$

$2<a_2^2-a_1^2\leq 3$

可知 $2(n-1)<a_n^2-a_1^2\leq 3(n-1)$ ，

所以 $4022<a_{2012}{}^2-1\leq 6033$ 。即 $63<\sqrt{4023}<a_{2012}\leq\sqrt{6034}<78$ 。

二、【參考解答】

$a^2+b^2\geq 2ab$ 所以 $a^2b^2+1-a^2-b^2\leq a^2b^2+1-2ab$

$(a^2-1)(b^2-1)\leq(ab-1)^2$

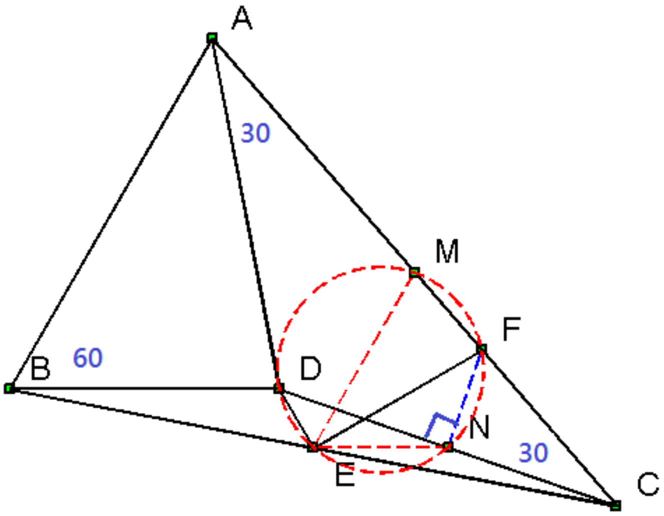
$\sqrt{(a^2-1)(b^2-1)}\leq\sqrt{(ab-1)^2}$ ，因為 $|a|>1,\ |b|>1$

$$\frac{1}{\sqrt{(a^2-1)(b^2-1)}}\geq\frac{1}{|ab-1|}$$

$$\frac{a^2}{a^2-1}+\frac{b^2}{b^2-1}\geq 2\sqrt{\frac{a^2b^2}{(a^2-1)(b^2-1)}}\geq 2\frac{|ab|}{|ab-1|}=2\left|\frac{ab}{ab-1}\right|\geq\frac{2ab}{ab-1}$$

三、【參考解答】

如圖，作 DM⊥AC 於 M， FN⊥CD 於 N，連結 EM, EN。



設 CF=a，則 AF=2a, CD=DA=$\sqrt{3}a$, CN=CF $\cos 30^o=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a=\dfrac{1}{2}$CD

即 N 是 CD 的中點。 △DBC 中, E, N 為兩邊中點，所以 EN 平行 BD 。

△ABC 中, E, M 為兩邊中點，所以 EM 平行 BA 。

∠MEN=∠MEC－∠NEC=∠ABC－∠DBC=60°=∠MDC=∠MDN

故 M, D, E, N 四點共圓。

觀察，DM⊥AC 於 M， FN⊥CD 於 N，則 M, D, F, N 四點共圓(DF 為直徑)。

所以，M, D, E, F, N 五點共圓。∠DEF=90°(DF 為直徑)，證得 DE⊥EF 。

四、【參考解答】

(1)設**二次**函數 $f(x)=Ax^2+Bx+C$ 。

所以， $a=Aa^2+Ba+C$ 且 $b=Ab^2+Bb+C$ 。

$B=1-A(a+b)$， $C=a-Aa^2-Ba=abA$

消去 B, C 可得

$$f(x)=x+A(x-a)(x-b)$$

因此，

$$\begin{aligned} f(f(x))-x &= f(x)+A[f(x)-a][f(x)-b]-x \\ &= A(x-a)(x-b)+A[x+A(x-a)(x-b)-a]\cdot[x+A(x-a)(x-b)-b] \\ &= A(x-a)(x-b)\{1+[1+A(x-b)][1+A(x-a)]\} \end{aligned}$$

所以， a, b 也是**四次**函數 $f(f(x))$ 的固定點。

(2)將原方程式變形為

$$(x^2-4x+1)^2-4(x^2-4x+1)+1-x=0$$

令 $f(x)=x^2-4x+1$，則 $f(x)$ 的兩個固定點為 $\dfrac{5\pm\sqrt{21}}{2}$ 即為方程式兩根。

另兩根由下列方程求之:

$$1+\left[1+\left(x-\frac{5+\sqrt{21}}{2}\right)\right]\left[1+\left(x-\frac{5-\sqrt{21}}{2}\right)\right]=0$$

化簡得 $x^2-3x-2=0,\ x=\dfrac{3\pm\sqrt{17}}{2}$ 。

$$\boxed{\text{方程式的四個解為 } \frac{5\pm\sqrt{21}}{2},\ \frac{3\pm\sqrt{17}}{2}}\text{。}$$