

一百零壹學年度高級中學數學科能力競賽複賽試題

南區（高雄區） 筆試（一） 編號：\_\_\_\_\_

注意事項：

- (1) 時間分配：2 小時
- (2) 本試卷共四題，滿分 49 分。第一題 12 分，第二題 12 分，第三題 12 分，第四題 13 分。
- (3) 將計算、證明過程依序寫在答案卷上。
- (4) 不可使用電算器。
- (5) 試題與答案卷一同繳回。

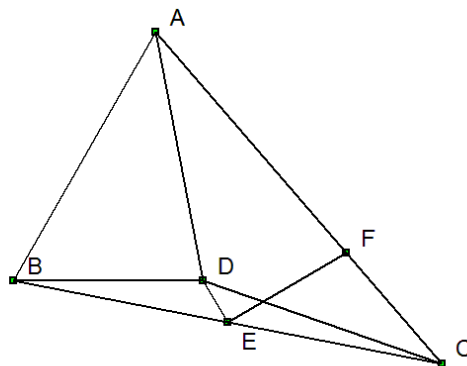
一、設數列  $\{a_n\}$  滿足  $a_1 = 1$ ， $a_2 = 2$ ，且  $\frac{a_{n+2}}{a_n} = \frac{a_{n+1}^2 + 1}{a_n^2 + 1}$  ( $n \geq 1$ )。求證

(1)  $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$ 。

(2)  $63 < a_{2012} < 78$ 。

二、設  $a, b$  均為實數且  $|a| > 1$ ， $|b| > 1$ ，求證  $\frac{a^2}{a^2 - 1} + \frac{b^2}{b^2 - 1} \geq \frac{2ab}{ab - 1}$

三、如右圖，設  $D$  是  $\triangle ABC$  內的一點，  
且  $\angle DAC = \angle DCA = 30^\circ$ ， $\angle DBA = 60^\circ$ ，  
 $E$  是  $BC$  邊的中點， $F$  是  $AC$  邊的三等分點，  
 $AF = 2FC$ 。求證  $DE \perp EF$ 。



四、給定函數  $f(x)$ ，若  $x^*$  滿足  $x^* = f(x^*)$  則我們稱  $x^*$  為  $f(x)$  的一個固定點。

(1) 求證：若  $a, b$  相異， $a, b$  是二次函數  $f(x)$  的固定點，則  $a, b$  也是四次函數  $f(f(x))$  的固定點。

(2) 解方程式  $x^4 - 8x^3 + 14x^2 + 7x - 2 = 0$ 。