

一百零壹學年度高級中學數學科能力競賽複賽試題

南區（高雄區） 筆試（一） 編號：_____

注意事項：

- (1) 時間分配：2 小時
- (2) 本試卷共四題，滿分 49 分。第一題 12 分，第二題 12 分，第三題 12 分，第四題 13 分。
- (3) 將計算、證明過程依序寫在答案卷上。
- (4) 不可使用電算器。
- (5) 試題與答案卷一同繳回。

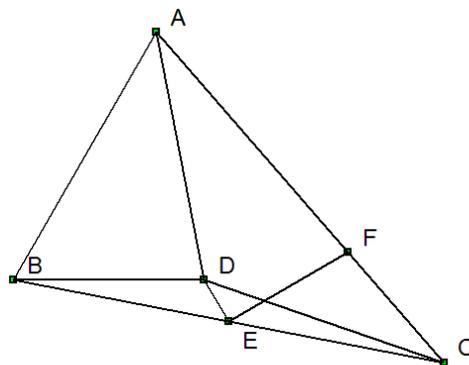
一、設數列 $\{a_n\}$ 滿足 $a_1 = 1$ ， $a_2 = 2$ ，且 $\frac{a_{n+2}}{a_n} = \frac{a_{n+1}^2 + 1}{a_n^2 + 1}$ ($n \geq 1$)。求證

(1) $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$ 。

(2) $63 < a_{2012} < 78$ 。

二、設 a, b 均為實數且 $|a| > 1$ ， $|b| > 1$ ，求證 $\frac{a^2}{a^2 - 1} + \frac{b^2}{b^2 - 1} \geq \frac{2ab}{ab - 1}$

三、如右圖，設 D 是 $\triangle ABC$ 內的一點，
且 $\angle DAC = \angle DCA = 30^\circ$ ， $\angle DBA = 60^\circ$ ，
 E 是 BC 邊的中點， F 是 AC 邊的三等分點，
 $AF = 2FC$ 。求證 $DE \perp EF$ 。



四、給定函數 $f(x)$ ，若 x^* 滿足 $x^* = f(x^*)$ 則我們稱 x^* 為 $f(x)$ 的一個固定點。

(1) 求證：若 a, b 相異， a, b 是二次函數 $f(x)$ 的固定點，則 a, b 也是四次函數 $f(f(x))$ 的固定點。

(2) 解方程式 $x^4 - 8x^3 + 14x^2 + 7x - 2 = 0$ 。