教育部101學年度高級中學數學競賽

嘉義區複賽試題（二）【參考解答】

一、【解】

12XXX 共$C_3^7=35$個

13XXX 共$C_3^6=20$個

14XXX 共$C_3^5=10$個

15XXX 共$C_3^4=4$個

16789 共 1 個

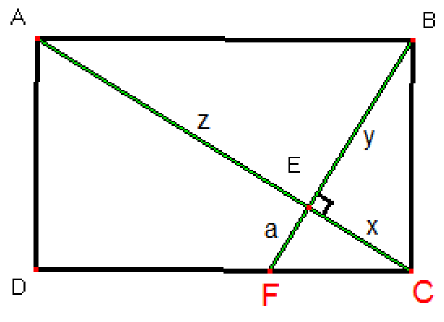
23XXX 共$C_3^6=20$個

24XXX 共$C_3^5=10$個

共 100 個

$\therefore a_{101}=25678$

二、【證明】



觀察$\Delta CEF\sim\Delta BEC\sim\Delta AEB$

因此，$\dfrac{a}{x}=\dfrac{x}{y}=\dfrac{y}{z}$

$\Rightarrow x^2=ay$ 且 $xy=az$

$\because a=1$ 且 $z=2$

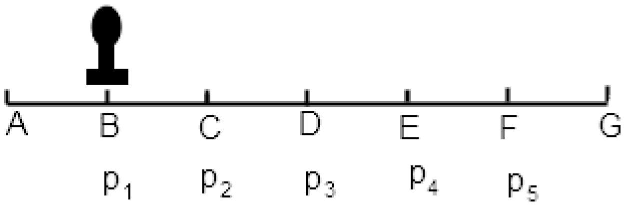
$\therefore x^2=y$ 且 $xy=2$

$\Rightarrow x^2=\dfrac{2}{x}$

$\Rightarrow x^3=2$

$\Rightarrow x=\sqrt[3]{2}$

三、【解】



如上圖，我們假設由 B 點走到 G 點的機率為 p_1，由 C 點走到 G 點的機率為 p_2…….根據假設，棋子向左走的機率為1/3，向右走的機率是2/3。

如此，由條件機率，我們得到下列關係式：

$$p_1 = \frac{2}{3}p_2$$

$$p_2 = \frac{1}{3}p_1 + \frac{2}{3}p_3$$

$$p_3 = \frac{1}{3}p_2 + \frac{2}{3}p_4$$

$$p_4 = \frac{1}{3}p_3 + \frac{2}{3}p_5$$

$$p_5 = \frac{1}{3}p_4 + \frac{2}{3}$$

由前 4 個式子我們可得到：$p_2 = \frac{3}{2}p_1,\ p_3 = \frac{7}{4}p_1,\quad p_4 = \frac{15}{8}p_1,\quad p_5 = \frac{31}{16}p_1$ 代入第 5 個式子，得 $p_1 = \frac{32}{63}$。

四、【解】

由托勒密定理：圓內接四邊形 $ABCD$ 之邊長與對角線長滿足

$$\overline{AC}\cdot\overline{BD} = \overline{AD}\cdot\overline{BC} + \overline{AB}\cdot\overline{CD}$$

設 $\overline{AB} = d, \overline{BC} = a, \overline{CD} = b, \overline{AD} = c$，則

$$\overline{AC}^2 = d^2 - a^2, \overline{BD}^2 = d^2 - c^2，$$

故有, $\left(d^2 - a^2\right)\left(d^2 - c^2\right) = \left(ac + bd\right)^2$

展開化簡得

$$d^4 - \left(a^2 + b^2 + c^2\right)d^2 - 2abcd = 0,$$

$$\Rightarrow\ d^3-\left(a^2+b^2+c^2\right)d-2abc=0$$

與題目中之給定條件比較即得　$abc=6$

五、【解】

若全用加號，則$1+2+\cdots+101=5151$超過 101，假設其中 $x_1,x_2,\cdots,x_k$ 為減號，故欲求k之最小值滿足下式

$$1+2+\cdots+101-2(x_1+x_2+\cdots+x_k)=101,$$

即 $x_1+x_2+\cdots+x_k=2525.$

顯然使用越大的 x_i 會使得 k 值越小，故求最小之 k 使 $101+100+99+\cdots+(101-k+1)\geq 2525,$ 如此得 $(203-k)k/2\geq 2525,$ 或 $k^2-203k+5050\leq 0.$ 故 k 值介於 $(203\pm\sqrt{203^2-4\cdot 5050})/2$ 之間，即 $k\geq(203-\sqrt{203^2-4\cdot 5050})/2>29$． 可取 $k=30,$ 此時 30 個連續和

$$101+100+99+\cdots+72=173\cdot 15=2595$$

比所需之 2525 大 70. 故捨棄 72 改以 2 取代之即得一組解。

（上式亦顯示$101+100+99+\cdots+73=2595-72=2523,$ 故只用 29 個數是不夠的。）

所以最少要用 30 個減號，例如在$2,73,74,75,\cdots,101$這 30 個數前放減號即可得一解：

$$1-2+3+4+\cdots+72-73-74-\cdots-101=101$$