教育部 101 學年度高級中學數學競賽

嘉義區複賽試題（一）　　編號：_____

（時間二小時）

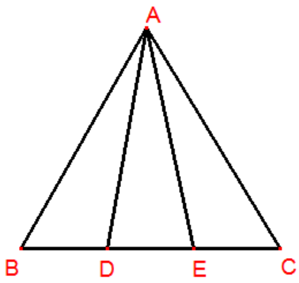
注意事項：

1. 本試卷共五題**計算證明題**，滿分為四十九分。

2. 請將答案寫在答案欄內，計算紙必須連同試卷交回。

一、在數列$\{a_n\}$中，已知$a_1=\dfrac{1}{3}$ 且 $a_{n+1}=2a_n-[a_n],\ \ n=1,2,3,\cdots,$ 其中$[x]$表示不大於x的最大整數。試證：對所有正整數n, $a_{n+2}-a_n=1$ 且 $a_{n+1}+a_n=n$都成立。
(9 分)

二、在ΔABC中，已知$\overline{AB}=\overline{AC}$ 且 D,E在$\overline{BC}$上使得$\overline{BD}=\overline{DE}=\overline{EC}$。試證：$\angle DAE>\angle EAC$。
(10 分)



三、令n為大於 1 的整數，$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$為正數且$x_1+x_2+\cdots+x_n=1$。試證：
(10 分)

$$\frac{x_1}{1+x_{2.}+\cdots+x_n}+\frac{x_2}{1+x_1+x_3+\cdots+x_n}+\cdots+\frac{x_n}{1+x_1+\cdots+x_{n-1}}\ge\frac{n}{2n-1}\ 。$$

四、試求方程式$x_1^4+x_2^4+\cdots+x_{11}^4=2012$的所有正整數解$x_1,x_2,\cdots,x_{11}$。
(10 分)

五、已知多項式$p(x)$滿足 $(2x-3)\,p(x)=(x-3)\,p(x+1)+xp(x-1)$。若$p(x)$不是常數多項式，試證：$p(x)$必為四次多項式。
(10 分)