101 學年度台灣省第十區(屏東區)

高級中學數理及資訊學科能力競賽複試試題

數學科筆試（二）【參考解答】

一、如果 $a_1 = a_2 = 1$，且令 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, n \ge 1$，即費波納西數列，證明 $a_{n+2}a_n - a_{n+1}{}^2 = (-1)^{n+1}$ 。

【參考解答】

證： 利用數學歸納法證明。

(1) 因為 $a_3 = 2$ ，所以 $a_3 a_1 - a_2{}^2 = 2\times 1 - 1^2 = 1 = (-1)^2$ 。

(2) 假設 $a_{n+2}a_n - a_{n+1}{}^2 = (-1)^{n+1}$ ，則

$$\begin{aligned} a_{n+3}a_{n+1} - a_{n+2}{}^2 &= (a_{n+2} + a_{n+1})a_{n+1} - (a_{n+1} + a_n)^2 = a_{n+2}a_{n+1} - 2a_{n+1}a_n - a_n{}^2 \\ &= (a_{n+2} - a_n)a_{n+1} - (a_{n+1} + a_n) = a_{n+1}{}^2 - a_{n+2}a_n = -(-1)^{n+1} = (-1)^{n+2} \end{aligned}$$

由數學歸納法得知，結果是對的。

二、已知 $f(x)$ 為 5 次實係數多項式，若 $f(\frac{1}{2}) = 6$ ， $f(\frac{3}{4}) = 4$ 且 $y = f(x)$ 之函數圖形會通過 $(-1,-3)$ 與 $(3,1)$ ，又 $f(x)$ 除以 $(x-5)$ 的餘式是 $\frac{3}{5}$ ，求 $f(2)$ 之值。

【參考解答】

解：設 $xf(x) - 3 = k(x+1)(x-\frac{1}{2})(x-\frac{3}{4})(x-3)(x-5)$ ，

令 $x = 0$ 代上式，解得 $k = -\frac{8}{15}$ $\rightarrow$ $y = f(2) = \boxed{-3}$ 。

三、正方形 $ABCD$ 中，M 為 $\overline{BC}$ 的中點，N 為 $\overline{CD}$ 的中點，令 θ 為角 $\angle MAN$ 的角度，試求 $\sin\theta$ 。

【參考解答】

令 α 為角 $\angle NAD$ 的角度，令 β 為角 $\angle BAM$ 的角度

則

$$\begin{aligned}\sin\theta &= \sin(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)) \\ &= \cos(\alpha+\beta) \\ &= \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \\ &= \frac{2}{\sqrt{5}}\frac{2}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{3}{5}\end{aligned}$$

四、已知 $\{a_n\}$ 為等比數列，對任意正整數 n，都有 $a_n>0$，且令 $S_n=\log a_1+\log a_2+\cdots+\log a_n$。如果 $S_m=S_n$，其中 m, n 為相異正整數，試求 S_{m+n} 之值。

【參考解答】令此等比數列之公比為 r，則 $a_k=a_1r^{k-1}$，其中 $k=1,2,3,4,\ldots$。

因為

$$S_n=\log a_1+\log a_2+\cdots+\log a_n=\log(a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n)=\log a_1{}^n r^{1+2+\cdots+n-1}=\log a_1{}^n r^{\frac{n(n-1)}{2}}，$$

如果

$$S_m=S_n\Rightarrow\log a_1^m r^{\frac{m(m-1)}{2}}=\log a_1 r^{\frac{n(n-1)}{2}}\Rightarrow a_1^m r^{\frac{m(m-1)}{2}}=a_1^n r^{\frac{n(n-1)}{2}}\Rightarrow a_1^{m-n}=r^{\frac{(n-m)(n+m-1)}{2}}。$$

又 $n\neq m\Rightarrow a_1=r^{\frac{(n-m)(n+m-1)}{2(m-n)}}\Rightarrow a_1=r^{\frac{(1-n-m)}{2}}$，因此

$$S_{m+n}=\log a_1^{m+n} r^{\frac{(m+n)(m+n-1)}{2}}=\log(r^{\frac{1-m-n}{2}})^{m+n} r^{\frac{(m+n)(m+n-1)}{2}}=\log r^0=0。$$