

## 高級中學數理及資訊學科能力競賽複試試題

### 數學科筆試（二）

編號：\_\_\_\_\_

注意事項：

- (1)時間分配：1 小時
- (2)本試卷共四題，滿分 21 分。第一題 5 分，第二題 5 分，第三題 5 分，第四題 6 分。
- (3)將計算、證明過程依序寫在答案卷上。
- (4)不可使用電算器。
- (5)試題與答案卷一同繳回。

一、如果  $a_1 = a_2 = 1$ ，且令  $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, n \geq 1$ ，即費波納西數列，證明

$$a_{n+2}a_n - a_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}。$$

二、已知  $f(x)$  為 4 次實係數多項式，若  $f(\frac{1}{2}) = 6$ ， $f(\frac{3}{4}) = 4$  且

$y = f(x)$  之函數圖形會通過  $(-1, -3)$  與  $(3, 1)$ ，又  $f(x)$  除以  $(x-5)$

的餘式是  $\frac{3}{5}$ ，求  $f(2)$  之值。

三、正方形  $ABCD$  中， $M$  為  $\overline{BC}$  的中點， $N$  為  $\overline{CD}$  的中點，令  $\theta$  為角  $\angle MAN$  的角度，試求  $\sin \theta$ 。

四、已知  $\{a_n\}$  為等比數列，對任意正整數  $n$ ，都有  $a_n > 0$ ，且令

$S_n = \log a_1 + \log a_2 + \cdots + \log a_n$ 。如果  $S_m = S_n$ ，其中  $m, n$  為相異正整數，試求  $S_{m+n}$  之值。