

高級中學數理及資訊學科能力競賽複試試題

數學科筆試（二）

編號：_____

注意事項：

- (1)時間分配：1 小時
- (2)本試卷共四題，滿分 21 分。第一題 5 分，第二題 5 分，第三題 5 分，第四題 6 分。
- (3)將計算、證明過程依序寫在答案卷上。
- (4)不可使用電算器。
- (5)試題與答案卷一同繳回。

一、如果 $a_1 = a_2 = 1$ ，且令 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, n \geq 1$ ，即費波納西數列，證明

$$a_{n+2}a_n - a_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}。$$

二、已知 $f(x)$ 為 4 次實係數多項式，若 $f(\frac{1}{2}) = 6$ ， $f(\frac{3}{4}) = 4$ 且

$y = f(x)$ 之函數圖形會通過 $(-1, -3)$ 與 $(3, 1)$ ，又 $f(x)$ 除以 $(x-5)$

的餘式是 $\frac{3}{5}$ ，求 $f(2)$ 之值。

三、正方形 $ABCD$ 中， M 為 \overline{BC} 的中點， N 為 \overline{CD} 的中點，令 θ 為角 $\angle MAN$ 的角度，試求 $\sin \theta$ 。

四、已知 $\{a_n\}$ 為等比數列，對任意正整數 n ，都有 $a_n > 0$ ，且令

$S_n = \log a_1 + \log a_2 + \cdots + \log a_n$ 。如果 $S_m = S_n$ ，其中 m, n 為相異正整數，試求 S_{m+n} 之值。