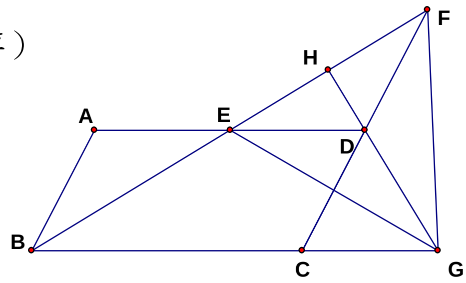
101 學年度台灣省第十區(屏東區)
高級中學數理及資訊學科能力競賽複試試題
數學科筆試（一）【參考解答】

一 平行四邊形 $ABCD$ 中，$\overline{AB} < \overline{AD}$，令點 G 在 $\overline{BC}$ 的延長線上但不在 $\overline{BC}$ 內，使得 $\overline{AB} = \overline{CG}$。如果 $\angle ABC$ 的角平分線分別交直線 $\overleftrightarrow{AD}$ 與 $\overleftrightarrow{CD}$ 於點 E, F，試證：$\overline{GE} = \overline{GF}$。

【參考解答】



令 $\angle ABC = 2\theta \Rightarrow \angle CBF = \theta$，$\therefore \angle DEF = \theta$（同位角相等）

$\because \angle ABC = 2\theta \Rightarrow \angle BCF = 180° - 2\theta \Rightarrow \angle BFC = \theta$

因此 ΔBCF 與 ΔDEF 皆為等腰三角形。

作直線 $\overleftrightarrow{GD}$ 交 $\overline{BF}$ 於 H 點，$\because \overline{CG} = \overline{AB} = \overline{CD} \Rightarrow \Delta CGD$ 為等腰三角形。所以 $\angle CDG = 90° - \theta$，又 $\angle FDH = 90° - \theta \Rightarrow \angle FDH = 90° - \theta$

但 $\angle DFH = \theta \Rightarrow \angle DHF = 90° \Rightarrow \overline{GH} \perp \overline{EF}$

又 ΔEDF 為等腰三角形，所以 H 為 $\overline{EF}$ 中點，$\therefore \Delta GHE \cong \Delta GHF \Rightarrow \overline{GE} = \overline{GF}$，得證。

二 設 x_1，x_2，x_3，$\cdots$，x_9，x_{10} 皆為整數，且滿足條件：

$|x_1| = 1$ 及 $|x_{n+1}| = |x_n + 1|$，$n = 1$，2，3，$\cdots$，8，9。

試求 $|x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_9 + x_{10}|$ 的最小值。

【參考解答】

$$x_1^2 = 1$$

$$x_2^2 = x_1^2 + 2x_1 + 1$$

$$x_3^2 = x_2^2 + 2x_2 + 1$$

………………..

$$x_9^2 = x_8^2 + 2x_8 + 1$$

$$x_{10}^2 = x_9^2 + 2x_9 + 1$$

前式全部相加得：　$x_{10}^2 = 2\ (x_1 + x_2 + \cdots + x_9) + 10$，

$\rightarrow\ (x_{10}+1)^2 = 2\ (\ x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_9 + x_{10}\ ) + 11$，

$\rightarrow\ x_{10}+1$ 必為奇數 且 $|x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_{10}| = \frac{1}{2}\left|(x_{10}+1)^2 - 11\right|$。

$\therefore$ 當 $(x_{10}+1)^2 = 9$ 時，$|x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_{10}|$有最小值為 $\boxed{1}$。

三　如果要從 1 到 n 取 k 個不連續的整數，

(a) k 最大是多少？ (b) 有多少不同的取法？

【參考解答】

(a) (1) n 是偶數時，$k=n/2$，(1) n 是奇數時，$k=(n+1)/2$。

(b) 如果把取到的數寫為 1，未取到的數寫為 0，此問題變為中有 k 個不連續的 1 的 n 位二進位數有幾個。如果我們將 $n-k$ 個 0 先排好，然後將 1 插入其中，共有 $n-k+1$ 個空格可放 1，所以有 $C(n-k+1,k)$ 種取法。

四　設 p 為質數，如果 p^2+11 的正因數之個數少於 11 個，試求滿足這樣條件的所有質數 p。

【參考解答】$p = 2,3,5$。

若 $p=2$，則 $p^2+11=15=3\times5$ 有 4 個正因數 1,3,5,15

若 $p=3$，則 $p^2+11=20=2^2\times5$ 有 6 個正因數 1,2,4,5,10,20

若 $p=5$，則 $p^2+11=36=2^2\times3^2$ 有 9 個正因數 1,2,3,4,6,9,12,18,36

若 $p=7$，則 $p^2+11=60=2^2\times3\times5$ 有 12 個正因數（不合）

欲證: 當 $p\geq11$ 時，p^2+11 的正因數之個數必多於 11 個。

因為 $p\geq11$，則 p^2 為 4 的倍數再加上 1，$\therefore p^2+11$ 必為 4 的倍數。

又 p^2 為 3 的倍數再加上 1，$\therefore p^2+11$ 必為 3 的倍數。

故可令 $p^2+11=2^2\times3\times a$，其中 a 為正整數。

因為 $p\geq11$，則 $p^2+11\geq132\Rightarrow a\geq11$。

若 $a=11$，則 $p^2+11=2^2\times3\times11$ 有 12 個正因數 1,2,3,4,6,11,12,22,33,44,66,132（不合）。

若 $a>11$，則 $p^2+11=2^2\times3\times a$ 亦有 12 個正因數 $1,2,3,4,6,12,a,2a,3a,4a,6a,12a$（不合）。