教育部 100 學年度高級中學數學競賽

台中區複賽試題（一）　（時間二小時）參考解答

注意事項：

1. 本試卷共五題**計算證明題**，滿分為四十九分。
2. 請將答案寫在答案欄內，計算紙必須連同試卷交回。

一、觀察一組 0, 1 所組成的數列，我們定義：當 1 個或多個相同數連在一起時，稱為一個”串”。例如”1 0 0 0 0 1 1 1 0 1 1”共有 5 個串，或說其串數為 5. 今將 n 個 0 和 m 個 1 隨機排列，形成一串數為 R 的數列。
(9 分)

(a) 求 $R=2$ 的機率。

(b) 若 $R=2k+1$，k 為整數，則 k 的範圍為何？

(c) 求 $R=2k+1$ 的機率。

【解】

(a) $\dfrac{2}{C_n^{m+n}}$

(b) 當 $n\neq m$, $1\le k\le \min(m, n)$

當 $n=m$, $1\le k\le m-1$

(c) $\dfrac{C_k^{m-1}C_{k-1}^{n-1}+C_{k-1}^{m-1}C_k^{n-1}}{C_n^{m+n}}$

令 R_1 代表 ”1” 的串數，R_0 代表 ”0” 的串數，則 $R=R_0+R_1$.

若 $R_1=r$，則 R_0 的值只可能是 r, $r-1$, 或 $r+1$，反之亦然。

所以，

$$p(R=2k+1)=p(R_1=k+1 \text{ 且 } R_0=k)+p(R_1=k \text{ 且 } R_0=k+1). \quad \text{--- (1)}$$

先求 $p(R_1=k+1 \text{ 且 } R_0=k)$.

(a) 先將 n 個 0 分成 k 堆，各有 $x_1, ..., x_k$ 個，即滿足

$x_1+\ \cdot+\ \cdot x_k=$ ，$x_i\ge 1$，共有 C_{k-1}^{n-1} 種分法。

(b) m 個 1 要形成 $k+1$ 個串，則要在其 $m-1$ 個間隔中，選出 k 個間隔並插入

(a)中的"0"串，共有 C_k^{m-1} 種選法。

所以，由(a), (b)知：

$$P(R_1=k+1 \text{ 且 } R_0=k)=\frac{C_k^{m-1}C_{k-1}^{n-1}}{C_n^{m+n}}\text{. --- (2)}$$

同理可得，

$$P(R_1=k \text{ 且 } R_0=k+1)=\frac{C_{k-1}^{m-1}C_k^{n-1}}{C_n^{m+n}}\text{. --- (3)}$$

因此，由 (1), (2), (3) 知，

$$p(R=2k+1)=\frac{C_k^{m-1}C_{k-1}^{n-1}+C_{k-1}^{m-1}C_k^{n-1}}{C_n^{m+n}}.$$

二、設 $\frac{1}{2}<a_1<\frac{2}{3}$，$a_{n+1}=a_n(2-a_{n+1})$，$n=1, 2, 3, \ldots$，證明
(10 分)

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}-n < 2.$$

【解】

由 $a_{n+1}=a_n(2-a_{n+1})$ 得 $a_{n+1}=\frac{2a_n}{a_n+1}$.

解方程 $x=\frac{2x}{x+1}$，得到兩個不動點 $x_1=0$，$x_2=1$;

再由 $a_{n+1}=\frac{2a_n}{a_n+1}$ 和 $a_{n+1}-1=\frac{a_n-1}{a_n+1}$，可得 $\frac{a_{n+1}-1}{a_{n+1}}=\frac{1}{2}\left(\frac{a_n-1}{a_n}\right)$,

由此得出，

$$\frac{1}{a_n}=1+\left(\frac{1}{a_1}-1\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

注意到 $\frac{1}{2}<a_1<\frac{2}{3}$ 時，$\frac{1}{2}<\frac{1}{a_1}-1<1$，故

$$1+\frac{1}{2^n} < \frac{1}{a_n} < 1+\frac{1}{2^{n-1}}.$$

所以，

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n} < (1+\frac{1}{1})+(1+\frac{1}{2})+\cdots+(1+\frac{1}{2^{n-1}})$$

$$= n+2-\frac{1}{2^n} < n+2;$$

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n} > (1+\frac{1}{2})+(1+\frac{1}{2^2})+\cdots+(1+\frac{1}{2^n})$$

$$= n+1-\frac{1}{2^n} > n+\frac{1}{2}.$$

故，

$$n+\frac{1}{2} < \frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n} < n+2.$$

三、找出所有的正整數 n, x, y, z, t 使得
(10 分)

$$n^x+n^y+n^z=n^t.$$

【解】

很明顯地，$n\neq 1$，所以我們可假設 $n>1$. 不知一般性，假設 $x\le y\le z\le t$.

$$n^x+n^y+n^z=n^t \Rightarrow 1+n^{y-x}+n^{z-x}=n^{t-x}.$$

若 $y>x$，則 mod n 後得 $1\equiv 0 \pmod{n}$，矛盾，所以 $y=x$. 因此，方程式簡化為

$$2+n^a=n^b\text{，其中 } a=z-x\text{，} b=t-x.$$

若 $a=0$，則 $n=3$ 且 $b=1$，可得解

$$(n, x, y, z, t)=(3, x, x, x, x+1)\text{，} x\in\mathbb{N}.$$

若 $a>0$，則 mod n 後得 $2\equiv 0 \pmod{n}$，所以 $n=2$，此時方程式再簡化為

$$2+2^a=2^b\text{，} b\ge a>0$$

$$\Rightarrow 2^{b-1}-2^{a-1}=1$$

$$\Rightarrow a=1 \text{ and } b=2$$

所以，

$$(n, x, y, z, t)=(2, x, x, x+1, x+2)\text{，} x\in\mathbb{N}.$$

四、設 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 是一個嚴格遞增函數，即 $f(m)<f(n)$，對所有 $m<n$ 皆成立。已知 $f(2)=2$ 且 $f(mn)=f(m)f(n)$ 對所有互質的 m, n 都成立，試找出所有滿足以上條件的函數 f 並證明之。($\mathbb{N}$ 代表所有正整數所成的集合)
(10 分)

【解】 $f(n)=n$，$\forall\, n\in\mathbb{N}$.

先求 $f(3)$:

$\because\ f(3)f(5)=f(15)<f(18)=f(2)f(9)$

$\therefore f(3)f(5)<f(2)f(9)<f(2)f(10)=f(2)f(2)f(5)$

$\Rightarrow f(3)<4$

又 $f(3)>f(2)=2$，所以，$f(3)=3$.

$f(6)=f(2)f(3)=6 \quad\Rightarrow\quad f(4)=4$ 且 $f(5)=5$.

接下來，以數學歸納法證明 $f(n)=n$，$\forall\, n\in\mathbb{N}$.

首先，當 $n=1, 2, 3, 4, 5, 6$ 時，結果成立。

令 $n>6$ 且 $f(k)=k$，$k<n$. 欲證 $f(n)=n$.

設 $2^r(2m+1)$ 為不小於 n 且不為 2 的次方的最小偶數，

則 $2^r(2m+1)=n$，$n+1$，$n+2$，或 $n+3$.

$\because\ n>6$，$2^r<n$，$2m+1<n$，

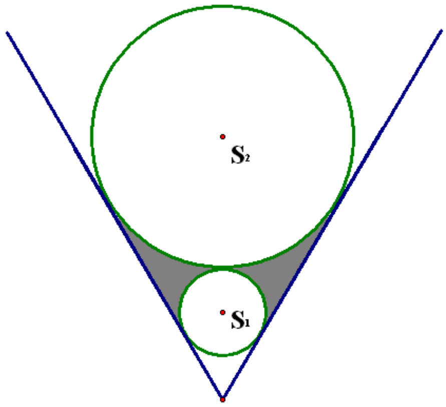
$\therefore\ f(2^r(2m+1))=f(2^r)\ f(2m+1)=2^r(2m+1)$.

$\Rightarrow$ 由嚴格遞增性知： $f(k)=k$，$\forall\, k\le 2^r(2m+1)$.

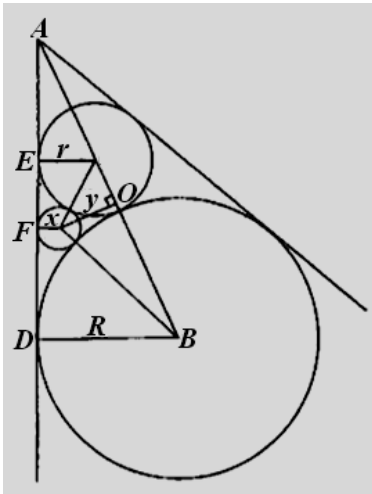
$\Rightarrow f(n)=n$.

五、現有一個倒圓錐，放入兩個半徑不同的球 S_1 與 S_2，使得 S_1 與 S_2 互相外切，且同時與圓錐相切(S_1 與 S_2 剛好卡在圓錐中，如下圖所示)。假設在 S_1、S_2 與圓錐所圍出的空隙中（灰色區域）可以放入 n 個全等的小球，使其圍成一圈、每個小球都與圓錐相切、分別與 S_1、S_2 外切、
(10 分)

且相鄰的小球也互相外切，試證：$6<n<10$．（$\sin 18^\circ \approx 0.3090$）



【證】



$$\overline{DE}^2=(R+r)^2-(R-r)^2=4Rr$$

$$\because\ \overline{DE}=\overline{DF}+\overline{FE}$$

$$\therefore\ \sqrt{Rr}=\sqrt{Rx}+\sqrt{rx}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x}=\frac{\sqrt{Rr}}{\sqrt{R}+\sqrt{r}} \quad \cdots\cdots (1)$$

因為小球的球心均在與圓錐軸垂直的一個平面上，

這些小球的球心在$\overline{AB}$上的投影是同一點 O。

它們均在以 O 為圓心，y 為半徑的圓上。

考慮梯形 ECBD 面積：

$$\frac{(r+R)\cdot\sqrt{4Rr}}{2}=\frac{(r+x)\cdot\sqrt{4xr}}{2}+\frac{(x+R)\sqrt{4xR}}{2}+\frac{(r+R)\cdot y}{2}$$

$$\Rightarrow (r+R)\cdot\sqrt{Rr}=(r+x)\cdot\sqrt{xr}+(x+R)\cdot\sqrt{xR}+\frac{(r+R)\cdot y}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{(r+R)\cdot y}{2}=(r+R)\cdot\sqrt{Rr}-(r+x)\cdot\sqrt{xr}-(x+R)\cdot\sqrt{xR}$$

$$=(r+R)\sqrt{Rr}-r\sqrt{xr}-x\sqrt{xr}-x\sqrt{xR}-R\sqrt{xR}$$

$$=(r+R)\sqrt{\ R}\,r-\sqrt{r}\ \ x\,r-\sqrt{\ }\ x(\sqrt{\ }x\ \ \sqrt{r}\ \ )\ R\sqrt{\ }$$

$$=(r+R)\cdot\sqrt{Rr}-x\sqrt{Rr}-r\sqrt{xr}-R\cdot\sqrt{xR} \qquad (\text{利用}(1))$$

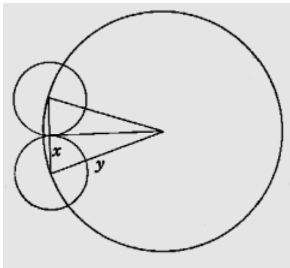
$$=(r+R)\cdot\sqrt{Rr}-x\sqrt{Rr}-r\sqrt{r}\cdot\frac{\sqrt{Rr}}{\sqrt{R}+\sqrt{r}}-R\sqrt{R}\cdot\frac{\sqrt{Rr}}{\sqrt{R}+\sqrt{r}}$$

$$=(r+R)\cdot\sqrt{Rr}-x\sqrt{Rr}-\sqrt{Rr}\left(\frac{R^{3/2}+r^{3/2}}{\sqrt{R}+\sqrt{r}}\right)$$

$$=(r+R)\cdot\sqrt{Rr}-x\sqrt{Rr}-\sqrt{Rr}(R+r-\sqrt{Rr})$$

$$=Rr-x\sqrt{Rr}=x(\sqrt{R}+\sqrt{r})^2-x\sqrt{Rr}$$

$$=x(R+r+\sqrt{Rr})$$



∵ $\sin\frac{360^\circ}{2n}=\frac{x}{y}=\frac{R+r}{2(R+r+\sqrt{Rr})}<\frac{1}{2}$

且 $\sin\frac{360^\circ}{2n}=\frac{x}{y}=\frac{R+r}{2(R+r+\sqrt{Rr})}>\frac{R+r}{3(R+r)}=\frac{1}{3}$

(考慮分母，利用算幾不等式：

$(2(R+r+\sqrt{Rr})=2R+2r+2\sqrt{Rr}<2R+2r+(R+r)$ 一等號不會成立)

∴ $\frac{1}{3}<\sin\frac{360^\circ}{2n}<\frac{1}{2}$.

$\Rightarrow$ $\sin 18^o\approx 0.3090<\frac{1}{3}<\sin\frac{360^o}{2n}<\frac{1}{2}=\sin 30^o$.

因為 sin 函數在 $0^\circ-90^\circ$ 為增函數，所以 $18<\frac{360}{2n}<30$，故 $6<n<10$.