

一百學年度高級中學數學科能力競賽複賽試題 南區（台南區）筆試（二）

注意事項：

(1)時間分配：1 小時

(2)本試卷共四題，滿分 21 分。第一題 3 分，第二題 6 分，第三題 6 分，第四題 6 分。

(3)將計算、證明過程依序寫在答案卷上。

(4)不可使用電算器。

(5)試題與答案卷一同繳回。

一、已知 x 為不等於零的正實數且滿足 $3f(5x^2) + 2f\left(\frac{1}{5x^2}\right) = 25x$ ，求 $f(5)$ 之值？

二、設 p 、 q 是兩實數，若方程式 $2x^2 + 11x + 13 = 0$ 的兩根亦是 $x^4 - px^2 + q = 0$ 之根，

試求 $[(p-q)^2]^{2011}$ 的末三位數字(其中 $[x]$ 表示不超過 x 的最大整數)。

三、如右下圖，線段 AB 為以點 O 為圓心的直徑，點 C 為上半圓上的一點，已知線段 AB 的長為 5 且線段 AC 的長為 4，線段 CD 垂直線段 AB 且交線段 AB 於 D 點。圓 O_1 與圓 O 相切於 E 點且分別與線段 CD 及線段 AB 相切。圓 O_2 與圓 O 相切於 F 點，且分別與線段 CD 及線段 AB 相切。試求線段 O_1O_2 的長。

四、設 $P(x)$ 為實係數多項式，且 $P(x^2) = P(x+2)P(x+6)$ 對於任意實數 x 均恆成立，求滿足這些條件的所有 $P(x)$ 。