一百學年度高級中學數學科能力競賽複賽試題
南區（台南區） 筆試（一）參考解答

注意事項：

(1)時間分配：2 小時

(2)本試卷共四題，滿分 49 分。第一題 12 分，第二題 12 分，第三題 12 分，第四題 13 分。

(3)將計算、證明過程依序寫在答案卷上。

(4)不可使用電算器。

(5)試題與答案卷一同繳回。

一、設 $\omega=\cos\dfrac{\pi}{7}+i\sin\dfrac{\pi}{7}$ ，若以 $\omega,\omega^3,\omega^5,\omega^9,\omega^{11},\omega^{13}$ 為根之方程式為

$ax^6+bx^5+cx^4+dx^3+ex^2+sx+t=0$，則 $ace+bd-st$ 之值為何？

【參考解答】：

顯然 $a\neq 0$

因為 $\omega,\omega^2,\omega^3,\cdots,\omega^{13},\omega^{14}$ 是 $x^{14}-1=0$ 之根

$\Rightarrow x^{14}-1=(x-\omega)(x-\omega^2)(x-\omega^3)\cdots(x-\omega^{14})$ ---------------(1)

又 $\omega^2,\omega^4,\omega^6,\omega^8,\omega^{10},\omega^{12},\omega^{14}$ 是 $x^7-1=0$ 之根

$\Rightarrow x^7-1=(x-\omega^2)(x-\omega^4)(x-\omega^6)(x-\omega^8)(x-\omega^{10})(x-\omega^{12})(x-\omega^{14})$ ---------(2)

$\dfrac{(1)}{(2)}$ 得 $\quad x^7+1=(x-\omega)(x-\omega^3)(x-\omega^5)(x-\omega^7)(x-\omega^9)(x-\omega^{11})(x-\omega^{13})$

因為 $\quad x-\omega^7=x+1$

所以 $\quad (x-\omega)(x-\omega^3)(x-\omega^5)(x-\omega^9)(x-\omega^{11})(x-\omega^{13})$

$$=\frac{x^7+1}{x+1}=x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+1$$

這說明了 $x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+1=0$ 的六個根分別是 $\omega,\omega^3,\omega^5,\omega^9,\omega^{11},\omega^{13}$

因為以 $\omega,\omega^3,\omega^5,\omega^9,\omega^{11},\omega^{13}$ 為根之方程式為 $ax^6+bx^5+cx^4+dx^3+ex^2+sx+t=0$

比較這 2 個六次方程式的係數可得 $\dfrac{1}{a}=\dfrac{-1}{b}=\dfrac{1}{c}=\dfrac{-1}{d}=\dfrac{1}{e}=\dfrac{-1}{s}=\dfrac{1}{t}$

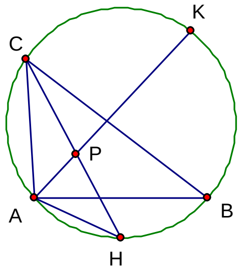
故 $b=d=s=-a$ 且 $c=e=t=a$

故 $ace+bd-st=a^3+2a^2$

$$\left(=-b^3+b^2=c^3+2c^2=-d^3+d^2=e^3+2e^2=-s^3+s^2=t^3+2t^2\text{或其他混合表法}\right)$$

二、設線段 AB 為圓上一弦，C、D 兩點為 AB 上半弧上任意兩相異點（舉例而言，如右下圖）。設 P、Q 兩點分別為 ΔABC 與 ΔABD 的內心。試證 A、B、P、Q 四點共圓，並求共圓心位置。

【參考解答】



∠ACB 的角平分線 CH
∠BAC 的角平分線 AK
兩線交於 P 點，P 點為△ABC 的內心
弧 AH = 弧 HB, 因∠ACH = ∠BCH
因此，可知 HA = HB
我們只須證明 HA = HP (即△HAP 為等腰三角形),
即可推知
HA = HP = HQ = HB
∠PAH = 1/2(弧角 HB + 弧角 BK)
弧角 BK = 弧角 KC, 因∠BAK = ∠CAK
∠APH 為△APC 的外角，因此，
∠APH = ∠ACP + ∠CAP = 1/2(弧角 AH + 弧角 CK)
=1/2(弧角 HB + 弧角 BK) =∠PAH,
∴△HAP 為等腰三角形且 HA=HP=HB。
同理可知, ΔHAQ 為等腰三角形，且 HA=HQ=HB。
由此可知 HA = HB = HP = HQ，即
A、B、P、Q 四點共圓的圓心是 H

三、已知 a, b, c 為三個複數，且滿足 $a|bc|+b|ca|+c|ab|=0$。

試證：$|(a-b)(b-c)(c-a)|\geq 3\sqrt{3}|abc|$

【參考解答】

由已知得 $\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{c}{|c|}=0$, 所以三個複數 $\frac{a}{|a|},\frac{b}{|b|},\frac{c}{|c|}$ 分布在單位圓上且重心為原點, 即他們兩兩夾角為120°, 亦即 a, b, c 兩兩夾角為120°。
考慮 $a, b, a\text{-}b$ 所形成的三角形

$\left|a-b\right|^2 =|a|^2+|b|^2-2|a|\cdot|b|\cos 120^\circ =|a|^2+|b|^2+|a|\cdot|b| \geq 3|a|\cdot|b|$

同理　$\left|b-c\right|^2 = \geq 3|b|\cdot|c|, \left|c-a\right|^2 = \geq 3|c|\cdot|a|$

所以 $|(a-b)(b-c)(c-a)|^2 \geq (3|ab|)(3|bc|)(3|ca|) = 27|abc|^2$

故證得 $|(a-b)(b-c)(c-a)| \geq 3\sqrt{3}|abc|$

四、設 $f(x)=ax+b$ 且滿足 $ab>0$ 及 $a+b=1$。若已知 $x_1x_2\cdots x_n=1$，

$x_i>0$，$i=1, 2, \ldots., n$，求證 $f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)\geq 1$。

【參考解答】

$f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)=(ax_1+b)(ax_2+b)\cdots(ax_n+b)$

則 a^kb^{n-k} 的係數為

$x_1x_2\cdots x_k+x_2x_3\cdots x_{k+1}+\cdots+x_{n+1-k}x_{n-k}\cdots x_n$，共有 C_k^n 項

令此 C_k^n 項的和為 S，則 $\dfrac{S}{C_k^n} \geq \sqrt[C_k^n]{x_1^kx_2^k\cdots x_n^k}=1$

因此 $S\geq C_k^n$

$f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)=(ax_1+b)(ax_2+b)\cdots(ax_n+b)$

$$\geq C_n^na^n+C_{n-1}^na^{n-1}b+\cdots+C_1^nab^{n-1}+b^n$$
$$=(a+b)^n=1$$

等號成立於 $x_1=x_2=\cdots=x_n=1$