

一百學年度高級中學數學科能力競賽複賽試題 南區（台南區）筆試（一）

注意事項：

- (1)時間分配：2 小時
- (2)本試卷共四題，滿分 49 分。第一題 12 分，第二題 12 分，第三題 12 分，第四題 13 分。
- (3)將計算、證明過程依序寫在答案卷上。
- (4)不可使用電算器。
- (5)試題與答案卷一同繳回。

一、設 $\omega = \cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7}$ ，若以 $\omega, \omega^3, \omega^5, \omega^9, \omega^{11}, \omega^{13}$ 為根之方程式為 $ax^6 + bx^5 + cx^4 + dx^3 + ex^2 + sx + t = 0$ ，則 $ace + bd - st$ 之值為何？

二、設線段 AB 為圓上一弦， $C、D$ 兩點為 AB 上半弧上任意兩相異點（舉例而言，如右下圖）。設 $P、Q$ 兩點分別為 $\triangle ABC$ 與 $\triangle ABD$ 的內心。試證 $A、B、P、Q$ 四點共圓，並求其圓心位置。

三、已知 a, b, c 為三個複數，且滿足 $a|bc| + b|ca| + c|ab| = 0$ 。

試證： $|(a-b)(b-c)(c-a)| \geq 3\sqrt{3}|abc|$

四、設 $f(x) = ax + b$ 且滿足 $ab > 0$ 及 $a + b = 1$ 。若已知 $x_1 x_2 \cdots x_n = 1$ ，

$x_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$ ，求證 $f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n) \geq 1$ 。