100學年度台灣省第四區(新竹高中)

高級中學數理及資訊學科能力競賽

數學科筆試(一)試題

編號：____________________(學生自填)

注意事項：

1. 本試卷共三題計算證明題，滿分爲49分。
2. 考試時間：2小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將演算過程依序填寫在答案卷內。

問題一： 設 p 爲質數，m,n 爲正整數，且 $m<n$。試證：在 m,n 之間、以 p 爲分母的所有最簡分數的總和爲 $\dfrac{(p-1)(n^2-m^2)}{2}$。 (16分)

【解】

因爲 p 是質數，所以所有在 m,n 之間、分母爲 p 的分數中，只要不能約分成整數的，就在我們所求之和中。因此所求爲

$$\begin{aligned}\sum_{k=mp}^{np}\frac{k}{p}-\sum_{k=m}^{n}k &= \frac{1}{p}\cdot\frac{(np+mp)(np-mp+1)}{2}-\frac{(n+m)(n-m+1)}{2}\\ &= \frac{m+n}{2}\cdot\left[np-mp+1-n+m-1\right]\\ &= \frac{(n+m)(n-m)(p-1)}{2}=\frac{(p-1)(n^2-m^2)}{2}.\end{aligned}$$

故得證。 □

問題二： (1) 設數列 $a_n=(1+\sqrt{2})^n+(1-\sqrt{2})^n$，其中 n 是自然數。試證：對所有的自然數 n，$a_{n+2}=2a_{n+1}+a_n$ 均成立。 (8分)

(2) 試求 $\left[(1+\sqrt{2})^{100}\right]$ 的個位數字(其中 $[x]$ 表示不超過實數 x 之最大整數)。 (8分)

【解】

(1) 若 $n>1$，則

$$\begin{aligned}2a_n &= \left[(1+\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})\right]a_n\\ &= \left[(1+\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})\right]\left[(1+\sqrt{2})^n+(1-\sqrt{2})^n\right]\\ &= \left[(1+\sqrt{2})^{n+1}+(1-\sqrt{2})^{n+1}\right]+(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})\left[(1+\sqrt{2})^{n-1}+(1-\sqrt{2})^{n-1}\right]\\ &= a_{n+1}-a_{n-1}.\end{aligned}$$

所以 $a_{n+2}=2a_{n+1}+a_n$，對於所有自然數 n 皆成立。

(2) $\left[(1+\sqrt{2})^{100}\right]$ 的個位數字是3。

設 $b_n = a_n \pmod{10}$，根據餘式定理知 $b_{n+2} \equiv 2b_{n+1} + b_n \pmod{10}$，又根據鴿籠原理知 b_n 在某一項之後必會循環(兩項組和最多只有100種情形，所以連續計算101項的話，其中必有循環)。因此逐項計算找出循環，

$$[b_n]_{n\in\mathbb{N}} = [2,6,4,4,2,8,8,4,6,6,8,2,2,6,\ldots],$$

觀察出此數列從 $n=1$ 開始每12個爲1個週期。所以可求得 $b_{100} = b_4 = 4$，但 $0 < (1-\sqrt{2})^{100} < 1$，所以 $\left[(1+\sqrt{2})^{100}\right]$ 的個位數字爲 $4-1=3$。

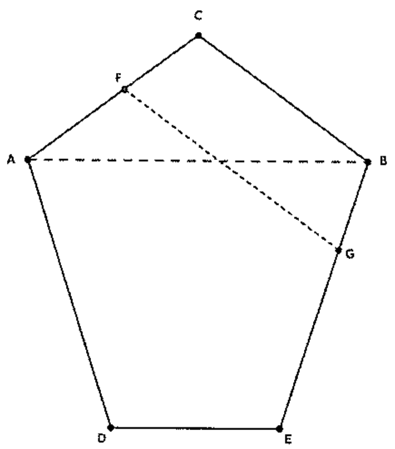
□

問題三： 考慮平面上所有的五個內角皆爲108°的五邊形所成的集合 $\mathscr{P}$。對於 $P \in \mathscr{P}$，將 P 的五條邊每次選取其中兩條，得到10種不同的組合；令 $i(P)$ 爲所選的邊長度相等的組數。例如對正五邊形 P_0，有 $i(P_0) = 10$。

(1) 試構造一個五邊形 $P \in \mathscr{P}$ 滿足 $i(P) = 2$。 (7分)

(2) 試求函數 $i: \mathscr{P} \to \mathbb{Z}$ 的所有可能取值($\mathbb{Z}$ 爲整數所成的集合)。 (10分)

【解】 首先證明一個引理：設 $P \in \mathscr{P}$。如果 $i(P) \geq 1$，則 P 必定由一個等腰三角形與一個等腰梯形相疊而成。



$i(P) \geq 1$ 即表示 P 至少有兩個邊長度相等。分兩種情形討論：

情況一：兩相鄰邊等長。如上圖，設 $\overline{AC} = \overline{BC}$。則 $\triangle ABC$ 爲 $108° - 36° - 36°$ 的等腰三角形，$\angle C = 108°$。所以 $\angle BAD = \angle ABE = 72°$。又 $\angle ADE = \angle DEB = 108°$，所以四邊形 $ABED$ 爲等腰梯形。

情況二：兩不相鄰邊等長。一樣如上圖，不失一般性可設 $\overline{AD} = \overline{BE}$。因爲 $\angle ADE = \angle DEB = 108°$，所以四邊形 $ABED$ 成等腰梯形，並且 $\angle BAD = \angle ABE = 72°$。由於 $\angle CAD = \angle CBE = 108°$，所以 $\triangle ABC$ 爲 $108° - 36° - 36°$ 的等腰三角形。

(1) 綜上所述，如果 $P \in \mathscr{P}$ 有兩條邊等長，則 P 中等長的邊至少有兩組：$\overline{AC} = \overline{BC}$, $\overline{AD} = \overline{BE}$。所以只要取 $\overline{AC} \neq \overline{AD}$，我們就得到一個五邊形 P 滿足 $i(P) = 2$。

(2) 函數 $i : \mathscr{P} \to \mathbb{Z}$ 的所有可能取值爲 $0, 2, 10$。

首先我們證明當 $i(P) \geq 3$ 時，必有 $i(P) = 10$ (即 P 爲正五邊形)。如果 $i(P) \geq 3$，則在某三組等長的邊中必有共同邊，因此可以得到至少有三邊等長。如果這等長的三邊是相鄰邊，則由此三邊的兩端點所連成的對角線，必爲 $108° - 36° - 36°$ 的等腰三角形的底邊，而得到上面的等腰三角形的腰長等於下面等腰梯形之腰長；故得此五邊形爲正五邊形。

如果此等長的三邊不完全相鄰，則其中相鄰的兩邊會是 $108° - 36° - 36°$ 的等腰三角形的兩腰，因此該等腰三角形的底邊長已知。由此底邊長與原來的共同邊長所形成的 $108° - 108° - 72° - 72°$ 的等腰梯形，其腰長必與較短底邊長相等。於是又得一正五邊形。因此命題 "$i(P) \geq 3 \Longrightarrow i(P) = 10$" 得證。

接著由 (1) 之前的討論，我們知道 $i(P) \geq 1$ 就能得到 $i(P) \geq 2$。在 (1) 中我們已經造出 $i(P) = 2$ 的例子，所以從 1 到 10 的整數中只有 2 和 10 在 i 的值域中。

最後我們造一個 $i(P) = 0$ 的例子。如上圖，將 $\overline{BC}$ 邊平行移動至 $\overline{FG}$。容易看出除了有限多種移動方法以外，其他的五邊形 $ADEGF$ 都是內角全等、但五邊皆不等長的五邊形。 $\square$