

100 學年度台灣省第四區(新竹高中)  
高級中學數理及資訊學科能力競賽  
數學科筆試(一) 試題

編號：\_\_\_\_\_ (學生自填)

**注意事項：**

1. 本試卷共三題計算證明題，滿分為 49 分。
2. 考試時間：2 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將演算過程依序填寫在答案卷內。

**問題一：** 設  $p$  為質數， $m, n$  為正整數，且  $m < n$ 。試證：在  $m, n$  之間、以  $p$  為分母的所有最簡分數的總和為  $\frac{(p-1)(n^2-m^2)}{2}$ 。 (16 分)

**問題二：** (1) 設數列  $a_n = (1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n$ ，其中  $n$  是自然數。試證：對所有的自然數  $n$ ， $a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$  均成立。 (8 分)

(2) 試求  $[(1+\sqrt{2})^{100}]$  的個位數字(其中  $[x]$  表示不超過實數  $x$  之最大整數)。 (8 分)

**問題三：** 考慮平面上所有的五個內角皆為  $108^\circ$  的五邊形所成的集合  $\mathcal{P}$ 。對於  $P \in \mathcal{P}$ ，將  $P$  的五條邊每次選取其中兩條，得到 10 種不同的組合；令  $i(P)$  為所選的邊長度相等的組數。例如對正五邊形  $P_0$ ，有  $i(P_0) = 10$ 。

- (1) 試構造一個五邊形  $P \in \mathcal{P}$  滿足  $i(P) = 2$ 。 (7 分)
- (2) 試求函數  $i: \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{Z}$  的所有可能取值 ( $\mathbb{Z}$  為整數所成的集合)。 (10 分)