

100 學年度台灣省第二區(新店高中) 高級中學數理及資訊學科能力競賽 數學科筆試(一) 試題 參考解答

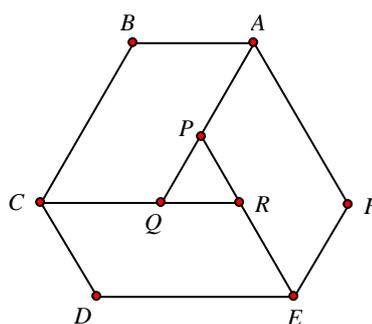
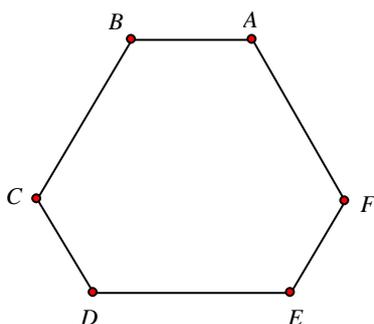
注意事項：

1. 本試卷共三題計算證明題，滿分為 49 分。
2. 考試時間：2 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將過程依序填寫在答案卷內。

問題一：若凸六邊形 $ABCDEF$ 具有下述性質：

- (1) \overline{AB} 與 \overline{DE} 平行， \overline{BC} 與 \overline{EF} 平行， \overline{CD} 與 \overline{FA} 平行；
- (2) $\overline{BC} - \overline{EF} = \overline{DE} - \overline{AB} = \overline{FA} - \overline{CD} > 0$ ；

試證：六邊形 $ABCDEF$ 的內角都相等。(16 分)



【證明】：過點 A 作一直線 AP 與 \overline{BC} 平行、過點 C 作一直線 CQ 與 \overline{DE} 平行、過點 E 作一直線 ER 與 \overline{FA} 平行。設直線 AP 與直線 CQ 交於點 Q 、直線 CQ 與直線 ER 交於點 R 、直線 ER 與直線 AP 交於點 P 。

因為 \overline{AB} 與 \overline{DE} 平行，所以，直線 CQ 與 \overline{AB} 平行。於是，四邊形 $ABCQ$ 是平行四邊形。同理，四邊形 $CDER$ 是平行四邊形、四邊形 $EFAP$ 是平行四邊形。

因為 $\overline{BC} - \overline{EF} = \overline{DE} - \overline{AB} = \overline{FA} - \overline{CD}$ ，而且

$$\overline{PQ} = \overline{AQ} - \overline{AP} = \overline{BC} - \overline{EF}，$$

$$\overline{QR} = \overline{CR} - \overline{CQ} = \overline{DE} - \overline{AB}，$$

$$\overline{RP} = \overline{EP} - \overline{ER} = \overline{FA} - \overline{CD}，$$

所以， $\overline{PQ} = \overline{QR} = \overline{RP}$ ， $\triangle PQR$ 是正三角形， $\angle RPQ = \angle PQR = \angle QRP = 60^\circ$ 。於是，可得

$$\angle A = \angle FAP + \angle PAB = \angle RPQ + \angle PQR = 120^\circ ,$$

$$\angle B = \angle PQC = 180^\circ - \angle PQR = 120^\circ ,$$

$$\angle C = \angle BCQ + \angle QCD = \angle PQR + \angle QRP = 120^\circ ,$$

$$\angle D = \angle QRE = 180^\circ - \angle QRP = 120^\circ ,$$

$$\angle E = \angle DER + \angle REF = \angle QRP + \angle RPQ = 120^\circ ,$$

$$\angle F = \angle RPA = 180^\circ - \angle RPQ = 120^\circ . \quad \parallel$$

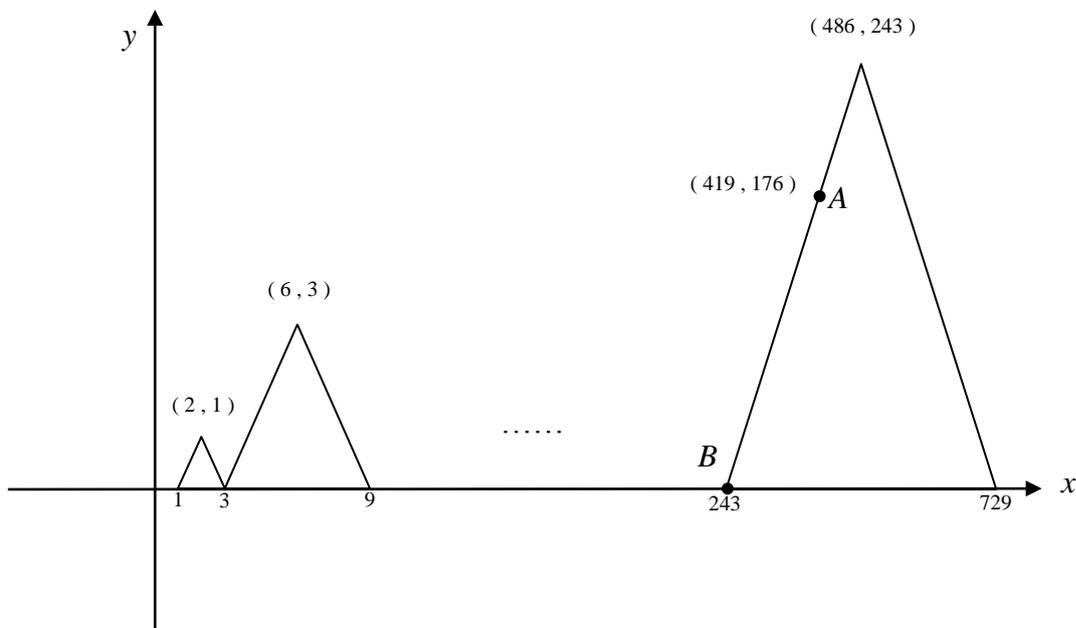
問題二：設函數 $f(x)$ 在 $1 \leq x \leq 3$ 時，滿足 $f(x) = 1 - |x - 2|$ ，且對所有的正數 x ，

$f(x)$ 滿足 $f(3x) = 3f(x)$ 。試求最小的正數 x 使得 $f(x) = f(2011)$ 。(16 分)

【證明】：

$$\begin{aligned} f(2011) &= 3f\left(\frac{2011}{3}\right) = 9f\left(\frac{2011}{9}\right) = \dots = 729f\left(\frac{2011}{729}\right) \\ &= 729\left(1 - \left|\frac{2011}{729} - 2\right|\right) = 176 \end{aligned}$$

因為 $f(3x) = 3f(x)$ ， $f(x)$ 的圖形如下：



\overline{BA} 之斜率為 $\frac{243}{243} = 1$ ，所以直線 \overline{BA} 的方程式為 $y = x - 243$

$$176 = x - 243 \Rightarrow x = 419$$

問題三： 假設 r_1, r_2, r_3 是實係數方程式 $x^3 - x^2 + ax - b = 0$ 的 3 個根，其中 r_1, r_2, r_3 滿足

$$0 < r_i < 1, \quad i = 1, 2, 3。$$

(1) 證明： $2\sqrt{1-r_1}\sqrt{1-r_2} \leq 1+r_3$ 。(8 分)

(2) 證明： $7a-9b \leq 2$ ，並求當等號成立時， a, b 之值。(9 分)

【證明】：

(1) 根與係數關係

$$1+r_3 = 2-r_1-r_2 = (1-r_1) + (1-r_2) \geq 2\sqrt{(1-r_1)(1-r_2)}。$$

其他重排顯然。

(2) 由 $1+r_3 \geq 2\sqrt{(1-r_1)(1-r_2)}$

$$1+r_2 \geq 2\sqrt{(1-r_1)(1-r_3)}$$

$$1+r_1 \geq 2\sqrt{(1-r_2)(1-r_3)}$$

$$1+1+b+a \geq 8(1-r_1)(1-r_2)(1-r_3) = 8(1-1+a-b)。$$

即得 $7a-9b \leq 2$ 。

等號成立的充分必要條件 $r_1 = r_2 = r_3 = \frac{1}{3}$ ，得到 $a = \frac{1}{3}, b = \frac{1}{27}$ 。