

**100 學年度台灣省第二區(新店高中)
高級中學數理及資訊學科能力競賽
數學科口試試題**

注意事項：

1. 本口試卷共 2 題，思考時間 15 分鐘；參賽者可先在本試卷上作答，口試時請攜帶本試卷應試，口試答辯時間 15 分鐘，並繳回本試卷。
2. 本項測驗著重解題技巧、表達能力與邏輯思維，參賽者不需要太專注於計算的精確度。

【試題一】

假設 $a = \sqrt{2} + 1$, $b = \frac{\sin \frac{7}{16}\pi}{\sin \frac{3}{16}\pi}$, $c = \frac{\sin \frac{5}{16}\pi}{\sin \frac{1}{16}\pi}$ 。試比較 a, b, c 的大小。

【解答】

【試題二】

已知 $S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ 為坐標空間中，以原點 $O(0, 0, 0)$ 為球心半徑為 1 的單位球。

(1) 若 A, B, C 為球面 S 上的三個點，試證：球面 S 上存在一點 P 滿足： $\overline{PA} = \overline{PB} = \overline{PC}$ 。

(2) 若 $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ 為球面 S 上的六個點，試證：球面 S 上存在一點 P 滿足：

$$\overline{PA_1}^2 + \overline{PA_2}^2 = \overline{PB_1}^2 + \overline{PB_2}^2 = \overline{PC_1}^2 + \overline{PC_2}^2。$$

【解答】