

台灣省第一區一百學年度  
高級中學數學及自然科能力競賽  
數學科筆試(二)試題 參考解答

注意事項：

1. 本試卷共七題填充題，每題3分，滿分為21分。
2. 考試時間：1小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將答案填寫在答案欄內。

1. 求  $x^{50} + x^5 + 1$  除以  $x^3 + x$  的餘式為  $x^2 + x + 1$ 。

2. 若  $p$  為質數且  $x^2 + px - 444p = 0$  之兩根均為整數，則  $p =$  37。

3. 設  $P$  為  $\triangle ABC$  所在平面上一點，滿足  $2\overrightarrow{PA} + 3\overrightarrow{PB} + 5\overrightarrow{PC} = 0$ ，則  $\triangle BPC$  面積： $\triangle APC$  面積的比值為  $\frac{2}{3}$ 。

4. 設  $f(x) = |x^2 - 3x| - x + 1$ ，則方程式  $f(f(x)) = -2$  的實數解有多少個？2。

5. 一個公正的骰子擲  $n$  次，若至少出現一次6點的機率大於0.95，則  $n$  之最小值為 17。(  $\log 2 = 0.3010$ ， $\log 3 = 0.4771$  )

6. 將一個半徑為5公分的鐵球，放入一個邊長10公分的正方體容器，再放入另一個小鉛球，然後蓋上正方體容器的蓋子，使蓋子與正方體完全密合，則這個鉛球的最大半徑為  $5(2 - \sqrt{3})$  公分

7. 在空間中，球面  $S: x^2 + y^2 + z^2 = 10$  有兩點  $A(3, 0, 1)$ ， $B(1, \sqrt{5}, 2)$ 。設  $\gamma$  為連接  $A$  點到

$B$  點的最短球面路徑，則  $\gamma$  的中點坐標為  $(\frac{4}{\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{5}{3}}, \sqrt{3})$ 。