

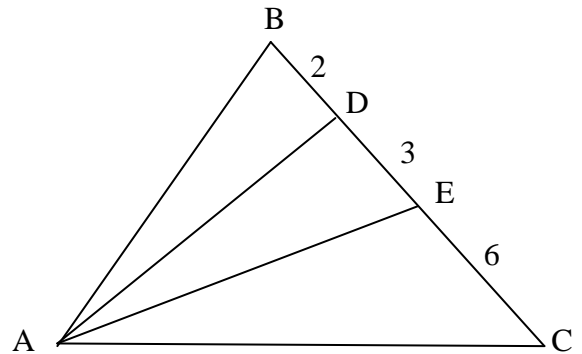
# 台灣省第一區一百學年度 高級中學數學及自然科能力競賽 數學科筆試(一)試題

注意事項：

1. 本試卷共四題計算證明題，滿分 49 分。
2. 考試時間：2 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將過程填寫在答案卷內。

【問題一】如圖， $\triangle ABC$  之  $\angle A$  三等份線交  $\overline{BC}$  於  $D$ 、 $E$ 。若  $\overline{BD} = 2$ ， $\overline{DE} = 3$ ， $\overline{EC} = 6$ ，

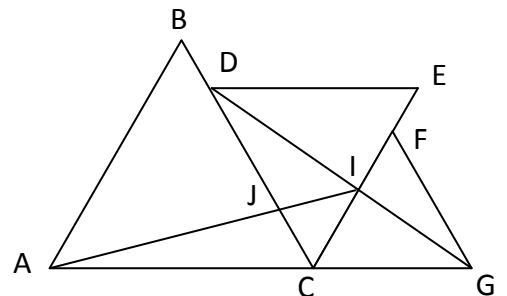
求  $\overline{AB} = ?$



【問題二】如圖  $\triangle ABC$ 、 $\triangle CDE$ 、 $\triangle CFG$  分別為邊長  $a$ 、 $b$ 、 $c$  的正三角形，其中  $C$  在

$\overline{AG}$  上， $D$  在  $\overline{BC}$  上， $F$  在  $\overline{CE}$  上， $\overline{DG}$  交  $\overline{CF}$  於  $I$ ， $\overline{AI}$  交  $\overline{CD}$  於  $J$ 。求

$\overline{DJ} : \overline{CJ}$  的比值。(12 分)



【問題三】有一個各位數字都不相同且都不為 0 的四位數，將這四位數的各位數字重新排列，可得一個最大數和一個最小數(例如:2793 經重排後，最大數為 9732，最小數為 2379)，如果如得的最大數與最小數的差恰好就是此四位數，試求所有這種四位數。

【問題四】設  $a_1 = 2$ ， $a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1$  ( $n \geq 1$ )。證明：

(1) 對任意固定的正整數  $n$  及對任意的正整數  $k$ ，存在一個整數  $c_k$ ，使得

$$a_{n+k} = c_k a_n + 1。$$

(2) 若  $m \neq n$ ，則  $a_m$ ， $a_n$  互質。