一百學年度高級中學數學科能力競賽複賽試題
南區（高雄區） 筆試（二）參考解答

注意事項：
(1)時間分配：1 小時
(2)本試卷共四題，滿分 21 分。第一題 5 分，第二題 4 分，第三題 4 分，第四題 4 分，
第四題 4 分。
(3)將計算、證明過程依序寫在答案卷上。
(4)不可使用電算器。
(5)試題與答案卷一同繳回。

一、設 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一個實數數列，$x_1=1,\ x_2=2$ 且滿足對於所有正整數 n，

$x_{n+2}=\frac{1}{2}\left(x_{n+1}+x_n\right)$。證明：$\sum_{k=1}^{\infty}\left(x_{2k+1}-x_{2k-1}\right)=\frac{2}{3}$

【參考解答】

(1) 對於所有正整數 n，

$$\because\ x_{n+2}=\frac{1}{2}\left(x_{n+1}+x_n\right)\quad\Rightarrow\quad x_{n+2}-x_{n+1}=-\frac{1}{2}\left(x_{n+1}-x_n\right)$$

$$\therefore\ x_{n+1}-x_n=\left(-\frac{1}{2}\right)\left(x_n-x_{n-1}\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)^2\left(x_{n-1}-x_{n-2}\right)=\cdots=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

(2) 對於所有正整數 k，由(1)可得

$$\begin{aligned}x_{2k+1}-x_{2k-1}&=x_{2k+1}-x_{2k}+x_{2k}-x_{2k-1}\\&=\left(-\frac{1}{2}\right)^{2k-1}+\left(-\frac{1}{2}\right)^{2k-2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2k-2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{2k-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2k-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}\left(x_{2k+1}-x_{2k-1}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k-1}&=\frac{1}{2}\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^4+\cdots\right)\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\left(1/2\right)^2}=\frac{2}{3}\end{aligned}$$

二、已知函數 $f(x)$ 滿足 $f(x+5)f(x)-f(x)+f(x+5)+1=0$，且 $f(1)=3$，

求 $f(2011)$ 之值？。

【參考解答】 $f(x+5)=\dfrac{f(x)-1}{f(x)+1}$

$$f(x+10)=\frac{f(x+5)-1}{f(x+5)+1}=\frac{\dfrac{f(x)-1}{f(x)+1}-1}{\dfrac{f(x)-1}{f(x)+1}+1}=\frac{-1}{f(x)}$$

$$f(x+20)=\frac{-1}{f(x+10)}=f(x)$$

$$f(2001)=f(20\times 200+1)=f(1)=3$$

$$f(2011)=\frac{-1}{f(2001)}=\frac{-1}{3}$$

三、從正整數 1, 2, 3, …, 20 中任意取出四個數令為 a_1, a_2, a_3, a_4，並將其排序，使得 $a_1<a_2<a_3<a_4$，且滿足 $a_2-a_1\geq 3$，$a_3-a_2\geq 4$，$a_4-a_3\geq 5$，則滿足這些條件的數共有多少種取法？

【參考解答】

$$a_1+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+(a_4-a_3)+(20-a_4)=20$$

$$a_1+(a_2-a_1-2)+(a_3-a_2-3)+(a_4-a_3-4)+(21-a_4)=12$$

每一項均 ≥ 1

故 $\dbinom{11}{4}=330$

四、證明當 $n\geq 14$, n 可以表示成 $3l+8m$，l 及 m 為正整數或零。

（例如： $14=2\times 3+1\times 8, 15=3\times 5, 16=2\times 8$）

【參考解答】: 利用數學歸納法證明如下：

(1) $14=2\times 3+1\times 8, 15=3\times 5$。

(2) 當 $k\geq 15$，假設 $k=3l+8m$，

(i) 若 $m=0$，此時 $l>5$，令 $l_1=l-5, m_1=2$，則 $k+1=3l_1+8m_1$。

(ii) 若 $m\neq 0$，此時 $m>1$，令 $l_1=l+3, m_1=m-1$，則 $k+1=3l_1+8m_1$。

故得證。

五、在六個人當中，任兩個人或者互相認識、或者互相不認識，證明這六人當中會有兩個人認識一樣多的人。

【參考解答】

假設這六人認識的人數都不一樣，則他們認識的人數分別為 0, 1, 2, 3, 4, 5。設甲認識 5 人，而乙認識 5 人，則甲認識乙，而乙不認識甲，與甲和乙必須或者互相認識、或者互相不認識矛盾，得證。