一百學年度高級中學數學科能力競賽複賽試題
南區（高雄區） 筆試（一）

注意事項：

(1)時間分配：2 小時

(2)本試卷共四題，滿分 49 分。第一題 12 分，第二題 12 分，第三題 12 分，第四題 13 分。

(3)將計算、證明過程依序寫在答案卷上。

(4)不可使用電算器。

(5)試題與答案卷一同繳回。

一、(1) 滿足 $x^2+y^2=z^2$ 的正整數 x, y, z 稱為畢氏三數組，證明互質的畢氏三數組 x, y, z 必為兩兩互質且 x 和 y 為一奇一偶。

(2) 如果 x, y, z 為一組互質的畢氏三數組(假設 x 是偶數)，則必存在一奇一偶且互質的 s 和 t 使 $x=2st, y=t^2-s^2, z=s^2+t^2$ (假設 $t > s$)，利用此證明 $x^4+y^4=z^2$ 沒有正整數 x, y, z 的解。

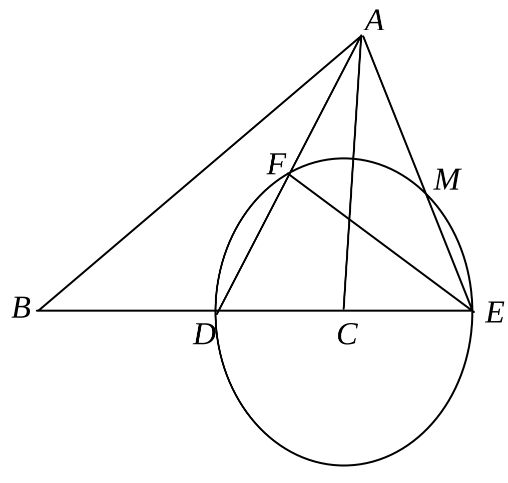
二、已知 $a+b=1$ 且 $ab>0$，$4ab\neq 1$。試證：$9ab(1-2a)(1-2b)<(1-4ab)^2$

三、如右圖，ΔABC 中，AD 是 $\angle BAC$ 的平分線，以 C 為圓心，CD 為半徑的半圓交 BC 的延長線於點 E，交 AD 於點 F，交 AE 於點 M，且 $\angle B=\angle CAE$，$FE:FD=4:3$。

(1) 求證：$AF=DF$；

(2) 求 $\angle AED$ 的餘弦值；

(3) 如果 $BD=10$，求 ΔABC 的面積。



四、設 $x_0=2\sqrt{3},\ y_0=3$，對於任意一個正整數 n，$x_n=\dfrac{2x_{n-1}y_{n-1}}{x_{n-1}+y_{n-1}}$ 且 $y_n=\sqrt{x_n y_{n-1}}$。

證明：對於所有正整數 n，$y_{n-1}<y_n<x_n<x_{n-1}$。