

教育部 100 學年度高級中學數學競賽

嘉義區複賽試題（一）（時間二小時）

注意事項：

1. 本試卷共五題計算證明題，滿分為四十九分。
 2. 請將答案寫在答案欄內，計算紙必須連同試卷交回。
-

一、國慶煙火在施放後升空 700 公尺時爆炸，煙火半徑為 300 公尺，則站 (9 分)
立於距煙火施放處多少公尺可以看得最清楚（提示，此時有最大視角）？

二、實數 a, b, c, d, e 滿足 $a+b+c+d+e=8$ ， (10 分)
 $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=16$ ，則 e 的最大值為何？

三、一圓圓心為 O ， L 為過圓心的直線，過 O 且與 L 垂直的直線交圓於 N ， (10 分)
 P, Q 為圓上兩點， PQ, NQ, NP 分別交 L 於 R, S, T 。已知
 $\angle PNQ=105^\circ$ ， $\angle PRT=25^\circ$ ，且 $\angle NST \geq \angle NTS$ ，試證： $\overline{PT} = \overline{PR}$ 。

四、設 $a_1=2$ ， $a_n = \frac{a_{n-1}}{2} + \frac{5}{2a_{n-1}}$ ， $n=2,3,\dots$ (10 分)

(1) 證明：對所有自然數 $n \geq 2$ ， $\sqrt{5} < a_n < 3$ 。(4 分)

(2) 證明： $a_8 - \sqrt{5} < 10^{-159}$ 。(6 分)

五、考慮所有形如 $x+y\sqrt{3}$ 的實數，其中 x 和 y 為整數，且 $|x|, |y| \leq 2011$ 。 (10 分)

證明：在這些數中存在一個數 $x_0 + y_0\sqrt{3}$ ，其中 x_0 和 y_0 不全為零，且滿足 $|x_0 + y_0\sqrt{3}| < \frac{3}{2013}$ 。