

100 學年度台灣省第十區(屏東區)
高級中學數理及資訊學科能力競賽複試試題
數學科筆試 (二) 參考解答

注意事項：

- (1)時間分配：1 小時
- (2)本試卷共四題，滿分 21 分。第一題 5 分，第二題 5 分，第三題 5 分，第四題 6 分。
- (3)將計算、證明過程依序寫在答案卷上。
- (4)不可使用電算器。
- (5)試題與答案卷一同繳回。

一、已知 $x_i \geq 0$ ，對每個 $i=1,2,3,4,5$ 而言，且滿足方程式 $\sum_{i=1}^5 x_i = 10$ 。

證明： $\sum_{i=1}^4 x_i x_{i+1} \leq 25$

【參考解答】 $\sum_{i=1}^4 x_i x_{i+1} \leq \frac{1}{4} [(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)^2 - (x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5)^2]$
 $\leq \frac{1}{4} [(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)^2] \leq \frac{100}{4} = 25$ 。

二、設 $\{a_n\}$ 為無窮數列，如果對任意正整數 $n \geq 1$ ，滿足 a_n 為整數，且

$$a_n + a_{n+1} = 2a_{n+2}a_{n+3} + 2011, \text{ 試求滿足這樣條件的所有整數數列 } \{a_n\}。$$

【參考解答】

$$a_n + a_{n+1} = 2a_{n+2}a_{n+3} + 2011, a_{n+1} + a_{n+2} = 2a_{n+3}a_{n+4} + 2011$$

$$\Rightarrow a_{n+2} - a_n = 2a_{n+3}(a_{n+4} - a_{n+2})$$

$$\text{對任意正整數 } n, k \therefore a_{n+2} - a_n = 2^k a_{n+3} \dots a_{n+2k+1} (a_{n+2k+2} - a_{n+2k}) \Rightarrow 2^k | a_{n+2} - a_n$$

因此對任意 $n \geq 1$ ， $a_{2n-1} = a_1$ ， $a_{2n} = a_2$ ，因此由條件 $a_n + a_{n+1} = 2a_{n+2}a_{n+3} + 2011$ 得到 $a_1 + a_2 = 2a_1a_2 + 2011 \Rightarrow (2a_1 - 1)(2a_2 - 1) = -4021$ 。

$$\because 4021 \text{ 是質數，} \Rightarrow (a_1, a_2) = (1, -2010), (0, 2011), (-2010, 1), (2011, 0)$$

所以共有 4 組數列。

三、試求 $(1+x)^{2011}$ 被 $1+x+x^2$ 除的餘式

$$\begin{aligned}
(1+x)^{2011} &\equiv (-x^2)^{2011} \pmod{1+x+x^2} \\
&\equiv -x^{4022} \pmod{1+x+x^2} \\
\text{【參考解答】:} &\equiv -(x^3)^{1340} x^2 \pmod{1+x+x^2} \\
&\equiv -(-1-x) \pmod{1+x+x^2} \\
&\equiv 1+x \pmod{1+x+x^2}
\end{aligned}$$

四、設 $f(x) = x^2 + 4x + 2$ ，試求 $f(f(\cdots f(f(x))\cdots))$ 。

【參考解答】

由 $f(x) = x^2 + 4x + 2 = (x+2)^2 - 2$ 。可得知
 $f(f(x)) = ((x+2)^2 - 2 + 2)^2 - 2 = (x+2)^4 - 2$ 。

推導可知 $f(f(\cdots f(f(x))\cdots)) = (x+2)^{2^n} - 2$ 。

所求為 $f(f(\cdots f(f(x))\cdots)) = (x+2)^{2^{10}} - 2$ 。