

100 學年度台灣省第十區(屏東區)
高級中學數理及資訊學科能力競賽複試試題
數學科筆試(二)

注意事項：

- (1)時間分配：1 小時
- (2)本試卷共四題，滿分 21 分。第一題 5 分，第二題 5 分，第三題 5 分，第四題 6 分。
- (3)將計算、證明過程依序寫在答案卷上。
- (4)不可使用電算器。
- (5)試題與答案卷一同繳回。

一、已知 $x_i \geq 0$ ，對每個 $i=1,2,3,4,5$ 而言，且滿足方程式 $\sum_{i=1}^5 x_i = 10$ 。

證明：
$$\sum_{i=1}^4 x_i x_{i+1} \leq 25$$

二、設 $\{a_n\}$ 為無窮數列，如果對任意正整數 $n \geq 1$ ，滿足 a_n 為整數，且 $a_n + a_{n+1} = 2a_{n+2} a_{n+3} + 2011$ ，試求滿足這樣條件的所有整數數列 $\{a_n\}$ 。

三、試求 $(1+x)^{2011}$ 被 $1+x+x^2$ 除的餘式

四、設 $f(x) = x^2 + 4x + 2$ ，試求 $f(f(\cdots f(f(x))\cdots))$ 。