九十九學年度高級中學數學能力競賽決賽

<table>
<tr><td colspan="4">題目：設 I 為 ΔABC 的內切圓圓心，P 為 ΔABC 內的任一點。證明：
若 $\angle BPC=\angle BIC$ ，則 $\overline{AP}\ge\overline{AI}$ 。</td></tr>
<tr><td>試題來源</td><td colspan="3">■ 自 編　□ 改編於：</td></tr>
<tr><td>類　　別</td><td colspan="3">□ 代 數　□ 數 論　□ 組 合　■ 幾 何</td></tr>
<tr><td>難 易 度</td><td>□ 難　■ 中等　□ 易</td><td>編 號</td><td>筆試(二) 第一題</td></tr>
<tr><td colspan="4">解答：證明：作 ΔBIC 的外接圓 O。因 $\angle BPC=\angle BIC$ ，則 P 點落在圓 O 上。

因 $\angle BOC=2\left(\angle IBC+\angle ICB\right)=\angle ABC+\angle ACB=\pi-\angle BAC$ ，

得 A、B、O、C 四點共圓。

因 $\overline{OB}=\overline{OC}$ ，得 $\angle OBC=\angle OCB$ 。

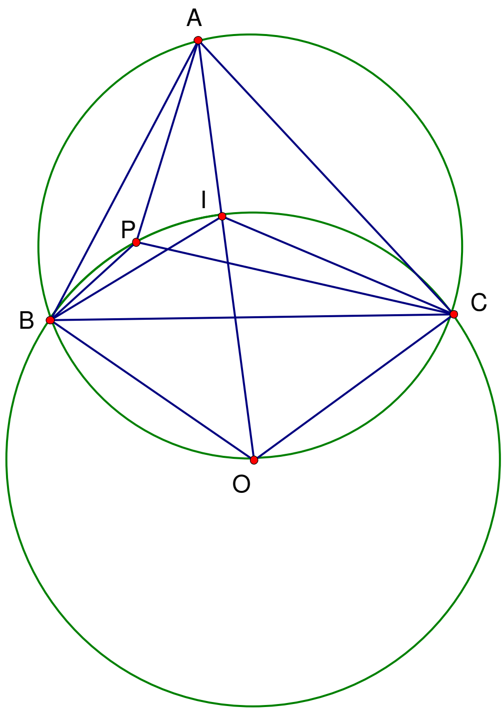
再由 A、B、O、C 四點共圓，

得 $\angle OAB=\angle OCB$，$\angle OAC=\angle OBC$。

故 $\angle OAB=\angle OAC$ ；即直線 OA 平分 $\angle BAC$ 。

因 I 爲 ΔABC 的內切圓圓心，

得 A、I、P 三點共線，
故 $\overline{AP}+\overline{PO}\ge\overline{AO}=\overline{AI}+\overline{IO}$ ，從而得 $\overline{AP}\ge\overline{AI}$ 。


</td></tr>
</table>

九十九學年度高級中學數學能力競賽決賽

<table>
<tr><td colspan="5">題目：試確定所有的實數三元序組（$a,\ b,\ c$）
使得下列不等式(*)：$|ax+by+c-\sqrt{4-x^2-y^2}|\le 1\cdots\cdots\cdots(*)$
對任意滿足 $x^2+y^2\leqq 4$ 的實數 $x,\ y$ 恆成立。</td></tr>
<tr><td>試題來源</td><td colspan="4">■ 自 編　□ 改編於：</td></tr>
<tr><td>類　　別</td><td colspan="4">□ 代 數　□ 數 論　□ 組 合　■ 幾何不等式</td></tr>
<tr><td>難 易 度</td><td>□ 難　■ 中偏難　□ 易</td><td>編 號</td><td colspan="2">筆試(二) 第二題</td></tr>
</table>

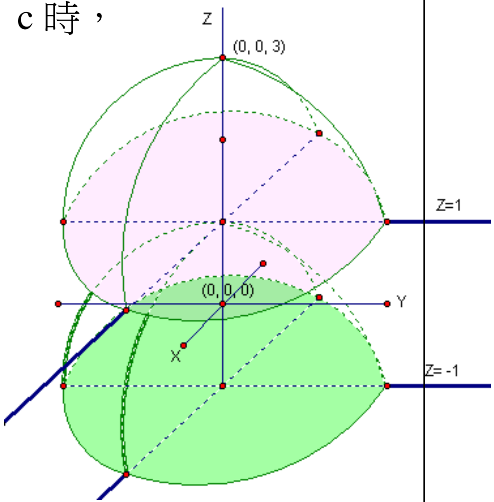
解答：a = b = 0, c = 1 或 (0, 0, 1) 恰有一組。首先將不等式(*)變形為

$$\sqrt{4-x^2-y^2}-1\le ax+by+c\le\sqrt{4-x^2-y^2}+1\cdots\cdots\cdots(**)\forall(x,y),x^2+y^2\le 4$$

此時意味著 z = ax + by + c 的平面，在 c 時，介於二個上半球面

$z=\sqrt{4-x^2-y^2}+1,\quad (x,y)\ni x^2+y^2\le 4$

$z=\sqrt{4-x^2-y^2}-1,\quad (x,y)\ni x^2+y^2\le 4$



恰可發現平面 z = 1 是包含半球面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}+1$的底面且與球面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}-1$ 相切於 (0, 0, 1),

故平面 z = 1 即 c = 1, a = b = 0 滿足

$\sqrt{4-x^2-y^2}-1\le c\le\sqrt{4-x^2-y^2}+1$

對 (x, y), $x^2+y^2\ \leqq\ 4$ 恆成立，故 (0, 0, 1) 為 (**) 之一組解。

進一步說明 (0, 0, 1) 是惟一的一組解：

若 (a, b, c) 為 (**) 之一組解時，則取 x=y=0 代入 (**) 知：

$\sqrt{4}-1\leqq c\leqq\sqrt{4}+1$

即 $1\leqq c\leqq 3$

底下証明：$1< c\leqq 3$ 時 (**) 無三元實數組 (a, b, c) 之解，

而當 c = 1 時 (**) 之解為 a=b=0：

(1) 當 $1< c\leqq 3$ 時，設 a, b, c 為 (**) 之一組解，取

x = 0, y = 2 代入得 $-1\leqq 2b+c\leqq 1$

取 x = 0, y = –2 代入得 $-1\leqq -2b+c\leqq 1$

故得 $2b+c\leqq 1$ 且 $-2b+c\leqq 1$，===> $2b<0$ 且 $-2b<0$ →←

令當 x = ±2, y=0 時，可知 a < 0 且 a > 0 亦得矛盾。

故知， c > 1 時，(**) 之解 (a, b, c) 不存在。

(2) 當 c = 1 時，設 a, b, c 為 (**) 之一組解，同上可得

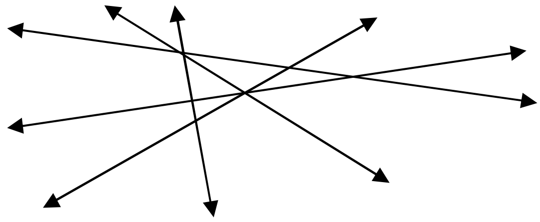
$b\leqq 0$ 且 $b\ \geqq\ 0,\quad a\leqq 0$ 且 $a\ \geqq\ 0$

得 $a = b = 0$。

合併以上得證 (**), 即 (*) 之三元實數組 (a, b, c)之解為 $(0, 0, 1)$ 恰為其唯一之解。

九十九學年度高級中學數學能力競賽決賽

題目：平面上有 n 條互不平行的直線，共有 m 個交點，其中僅兩直線通過的交點個數為 k，而由相鄰的交點所截開的線段個數為 S 。例如：下圖為 5 條直線、6 個交點的特例，其中 $n=5, m=6, k=4$ ，而線段個數 $S=9$ 。

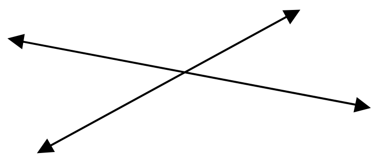


試證： $S \geq 3m-k-n$ 。

試題來源	□ 自 編 ■ 改編於：2010TRML 思考賽改編		
類　　別	□ 代 數 □ 數 論 ■ 組 合 □ 幾 何		
難 易 度	□ 難 ■ 中等 □ 易	編 號	筆試(二) 第三題

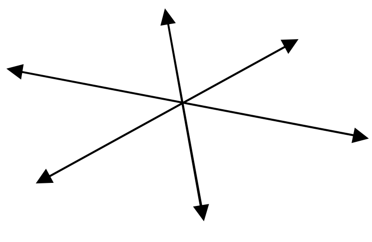
解答：以各交點爲主軸計算所有的線段及射線數：

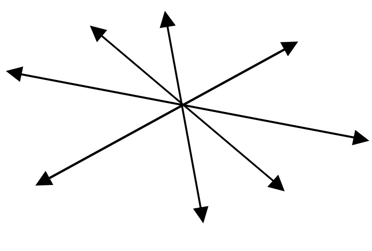
(1) 恰兩直線通過的交點，每一交點提供 4 條線段或射線，合計貢獻 $4k$ 條線段



(2) 三條或三條以上的直線通過的交點，每一交點提供至少 6 條線段或射線，合

至少 $6(m-k)$ 條線段或射線。





總計至少貢獻 $4k+6(m-k)=6m-2k$ 條線段或射線，其中恰有 $2n$ 條是射線(

因爲每一條直線的兩端各出現一條射線)。因此，剩下的線段數至少爲 $6m-2k$

又這些線段在兩端點計數時各重複算了一次，故

$$S \geq \frac{6m-2k-2n}{2} = 3m-k-n$$