九十九學年度高級中學數學能力競賽決賽

<table>
<tr><td colspan="4">題目：是否在平面上存在 2010 個頂點使得
(1) 任意三點不共線
(2) 任意二點的距離為無理數
(3) 任意三點構成的三角形之面積為有理數。</td></tr>
<tr><td>試題來源</td><td colspan="3">□ 自 編 □ 改編於：</td></tr>
<tr><td>類 別</td><td colspan="3">□ 代 數 □ 數 論 □ 組 合 □ 幾 何</td></tr>
<tr><td>難 易 度</td><td>□ 難 □ 中等 □ 易</td><td>編 號</td><td>獨立研究(二)第一題</td></tr>
<tr><td colspan="4">解答：(1) 取 2010 個頂點 (k,k^2) 其中 $k=1,2,\cdots,2010.$ 顯然任三點不共線

(2) $\overline{(i,i^2)(j,j^2)}=\sqrt{(i-j)^2+(i^2-j^2)^2}=|i-j|\sqrt{1+(i+j)^2}\notin Q$

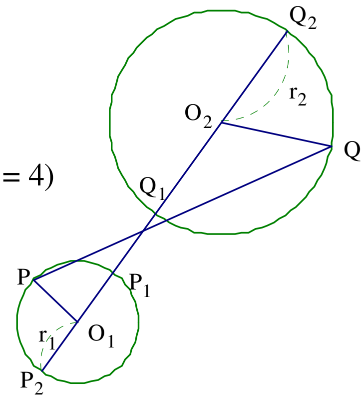
(3) $(i,i^2),(j,j^2),(k,k^2)$ 之面積為
$\frac{1}{2}(k-i)(k^2+i^2)-\frac{1}{2}(j-i)(j^2+i^2)-\frac{1}{2}(k-j)(k^2+j^2)\in Q$</td></tr>
</table>

九十九學年度高級中學數學能力競賽決賽

題目：設 $0 \leq \theta, \varphi \leq 2\pi$，試確定 $(\cos\theta-3-2\cos\varphi)^2+(\sin\theta-4-2\sin\varphi)^2$ 的最大值與最小值。			
試題來源	□ 自 編 □ 改編於：		
類 別	□ 代 數 □ 數 論 □ 組 合 □ 幾 何		
難 易 度	□ 難 □ 中等 □ 易	編 號	獨立研究(二)第二題

解答：任給兩相離圓(O_1, r_1), 圓(O_2, r_2)，P, Q 分別爲 O_1, O_2 圓上的任兩點，則 $\overline{O_1O_2}-(r_1+r_2) \leq \overline{PQ} \leq \overline{O_1O_2}+(r_1+r_2)$ 且當直線 O_1O_2 交圓 O_1 於 P_1、P_2，交圓 O_2 於 Q_1、Q_2 時，如圖所示，則

$$\overline{P_2Q_2}=\overline{O_1O_2}+(r_1+r_2),\ \overline{P_1Q_1}=\overline{O_1O_2}-(r_1+r_2)$$



考慮圓 O_1：$x^2+y^2=1$，O_2：$(x-3)^2+(y-4)^2=4$，
(亦可考慮圓 O_1：$(x-3)^2+(y-4)^2=1$，O_2：$x^2+y^2=4$)

其上的參數可分別表示成 $P(\cos\theta, \sin\theta)$, $Q(3+2\cos\varphi, 4+2\sin\varphi)$

而 $\overline{PQ}=\sqrt{(\cos\theta-3-2\cos\varphi)^2+(\sin\theta-4-2\sin\varphi)^2}$

故 $\overline{P_1Q_1} \leq \overline{PQ} \leq \overline{P_2Q_2}$

而 $P_2Q_2 = O_1O_2 + r_1 + r_2 = 5+1+2=8$, $P_1Q_1 = O_1O_2 - (r_1+r_2) = 5-1-2=2$.
故得 $(\cos\theta-3-2\cos\varphi)^2+(\sin\theta-4-2\sin\varphi)^2$ 的最大值爲 $P_2Q_2^{\,2}=64$，
而最小值爲 $P_1Q_1^{\,2}=4$。

注：取 $\tan\theta = 4/3$[θ 爲第三象限角]，$\tan\varphi = 4/3$[φ 爲第一象限角]時，得 $\sin\theta = -4/5$，$\cos\theta = -3/5$，$\sin\varphi = 4/5$，$\cos\varphi = 3/5$ 代入得最大值爲 64，
同樣的，$\tan\theta = 4/3$[θ 爲第一象限角]，$\tan\varphi = 4/3$[φ 爲第三象限角]時，代入得最大值爲 4

注：本題亦可用偏微分作，顯然具有某些的複雜度與難度。

九十九學年度高級中學數學能力競賽決賽

<table>
<tr><td colspan="4">題目：將 $1,2,\cdots,12$ 中的奇數與偶數配對，可以配成 6 對，我們以 $\{(1,a_1),(3,a_3),(5,a_5),(7,a_7),(9,a_9),(11,a_{11})\}$ 表示，其中 $a_1,a_3,\cdots,a_{11}$ 是 $2,4,\cdots,12$ 的一種排列。若要求對每一個 i， $i=1,3,\cdots,11$， a_i 必須與 i 互質，求符合此條件的 $(a_1,a_3,\cdots,a_{11})$ 的個數。</td></tr>
<tr><td>試題來源</td><td colspan="3">□ 自 編 □ 改編於：</td></tr>
<tr><td>類 別</td><td colspan="3">□ 代 數 □ 數 論 □ 組 合 □ 幾 何</td></tr>
<tr><td>難 易 度</td><td>□ 難 □ 中等 □ 易</td><td>編 號</td><td>獨立研究(二)第三題</td></tr>
</table>

解答：首先我們有以下幾個觀察：

（1） $i=1,7,11$ 時，a_i 可為任意偶數。

（2） a_3 須為 6, 12 以外的偶數。

（3） a_5 須為 10 以外的偶數。

（4） a_9 須為 6, 12 以外的偶數。

令 A_3 表示違反(2)的所有配對方法所成的集合，即 a_3 為 6 或 12 的所有 $(a_1,a_3,\cdots,a_{11})$ 所成的集合；類似的，令 A_5 表示 $a_5=10$ 的所有 $(a_1,a_3,\cdots,a_{11})$ 所成的集合，A_9 表示 a_9 為 6 或 12 的所有 $(a_1,a_3,\cdots,a_{11})$ 所成的集合。以下將計算 $A_3\cup A_5\cup A_9$ 的元素個數，利用取捨原理（inclusion-exclusion principle）：

$$|A_3\cup A_5\cup A_9|=|A_3|+|A_5|+|A_9|-|A_3\cap A_5|-|A_5\cap A_9|-|A_3\cap A_9|+|A_3\cap A_5\cap A_9|$$

其中 $|A_3|=2\cdot 5!$, $|A_5|=5!$, $|A_9|=2\cdot 5!$, $|A_3\cap A_5|=2\cdot 4!$, $|A_5\cap A_9|=2\cdot 4!$,

$|A_3\cap A_9|=2\cdot 4!$, $|A_3\cap A_5\cap A_9|=2\cdot 3!$

因此

$$|A_3\cup A_5\cup A_9|=5\cdot 5!-6\cdot 4!+2\cdot 3!=468$$

未加任何條件的配對方法有 $6!=720$ 種，

因此符合條件的配對方法數為 $720-468=252$ 種。