

九十九學年度高級中學數學能力競賽決賽

獨立研究試題（二）

注意事項：

- (1) 三題中自選兩題作答，並請註明題號
 - (2) 時間：2 小時（10:20~12:20）
 - (3) 配分：每題皆為 7 分
 - (4) 不可使用計算器
 - (5) 請將答案寫在答案卷內
-

一、是否在平面上存在 2010 個頂點使得

- (1) 任意三點不共線
- (2) 任意二點的距離為無理數
- (3) 任意三點構成的三角形之面積為有理數。

二、設 $0 \leq \theta, \varphi \leq 2\pi$ ，試確定 $(\cos\theta - 3 - 2\cos\varphi)^2 + (\sin\theta - 4 - 2\sin\varphi)^2$ 的最大值與最小值。

三、將 $1, 2, \dots, 12$ 中的奇數與偶數配對，可以配成 6 對，我們以

$\{(1, a_1), (3, a_3), (5, a_5), (7, a_7), (9, a_9), (11, a_{11})\}$ 表示，其中 a_1, a_3, \dots, a_{11} 是 $2, 4, \dots, 12$ 的一種排列。若要求對每一個 $i, i=1, 3, \dots, 11$ ， a_i 必須與 i 互質，求符合此條件的 $(a_1, a_3, \dots, a_{11})$ 的個數。