九十九學年度高級中學數學能力競賽決賽

題目：已知橢圓$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$的左、右焦點分別為$F_1$、$F_2$，過$F_1$的直線交橢圓於$B$、$D$兩點，過$F_2$的直線交橢圓於$A$、$C$兩點，且$\overline{AC}\perp\overline{BD}$，垂足為$P$。試求四邊形$ABCD$的面積的最小值。

試題來源	□ 自 編　□ 改編於：		
類　　別	□ 代 數　□ 數 論　□ 組 合　□ 幾 何		
難 易 度	□ 難　□ 中等　□ 易	編 號	獨立研究(一)第一題

解答： (i) 當$\overline{BD}$的斜率k存在且$k\neq 0$時，$\overline{BD}$的方程為$y=k(x+1)$，

代入橢圓方程$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$，並化簡得$(3k^2+2)x^2+6k^2x+3k^2-6=0$.

設$B(x_1，y_1)$，$D(x_2，y_2)$，則

$$x_1+x_2=-\frac{6k^2}{3k^2+2}，x_1x_2=\frac{3k^2-6}{3k^2+2}，$$

$$\overline{BD}=\sqrt{1+k^2}\cdot|x_1-x_2|=\sqrt{(1+k^2)\cdot\left[(x_2+x_2)^2-4x_1x_2\right]}=\frac{4\sqrt{3}(k^2+1)}{3k^2+2}；$$

因為$\overline{AC}$與$\overline{BC}$相交於點p，且$\overline{AC}$的斜率為$-\frac{1}{k}$,

$$所以，\overline{AC}=\frac{4\sqrt{3}\left(\frac{1}{k^2}+1\right)}{3\times\frac{1}{k^2}+2}=\frac{4\sqrt{3}(k^2+1)}{2k^2+3}.$$

四邊形$ABCD$的面積

$$S=\frac{1}{2}\cdot\overline{BD}\cdot\overline{AC}=\frac{24(k^2+1)^2}{(3k^2+2)(2k^2+3)}\geq\frac{24(k^2+1)^2}{\left[\frac{(3k^2+2)+(2k^2+3)}{2}\right]^2}=\frac{96}{25}.$$

當$k^2=1$時，上式等號成立.

(ii) 當$\overline{BD}$的斜率$k=0$或斜率不存在時，四邊形$ABCD$的面積$S=4$.

綜合以上所論，四邊形$ABCD$的面積的最小值為$\frac{96}{25}$.

九十九學年度高級中學數學能力競賽決賽

<table>
<tr><td colspan="4">題目：已知正數 a,b,c 滿足條件 $a+b+c=3$ ，試證：$(3-2a)(3-2b)(3-2c)\le a^2b^2c^2$ 。</td></tr>
<tr><td>試題來源</td><td colspan="3">☐ 自編 ☐ 改編於：</td></tr>
<tr><td>類　別</td><td colspan="3">☐ 代數 ☐ 數論 ☐ 組合 ☐ 幾何</td></tr>
<tr><td>難易度</td><td>☐ 難 ☐ 中等 ☐ 易</td><td>編號</td><td>獨立研究(一)第二題</td></tr>
<tr><td colspan="4">解答：為不失一般性，不妨假設 $a\le b\le c$ 。
(1)如果 $a+b\le c$, 由 $a+b+c=3\le 2c\Rightarrow c\ge\frac{3}{2}$ 。
又 $a+b+c=3\ge 3a\Rightarrow a\le 1<\frac{3}{2}, \therefore b<\frac{3}{2}$ 。
因此 $(3-2a)(3-2b)(3-2c)<0\le a^2b^2c^2$ 。
(2)如果 $a+b>c$, 令 $s=\frac{a+b+c}{2}=\frac{3}{2}$, 所以
$(3-2a)(3-2b)(3-2c)\le a^2b^2c^2 \Leftrightarrow 8(s-a)(s-b)(s-c)\le a^2b^2c^2$ 。
我們可考慮 a,b,c 構成一三角形的三邊長，由三角形面積公式知，
令三角形面積為 A ，則 $A^2=s(s-a)(s-b)(s-c)=(\frac{abc}{4R})^2$ ，
其中 R 為三角形外接圓的半徑。
因此 $(3-2a)(3-2b)(3-2c)\le a^2b^2c^2 \Leftrightarrow 8(s-a)(s-b)(s-c)\le a^2b^2c^2 \Leftrightarrow$
$8A^2\le s(abc)^2=16sR^2A^2\Rightarrow 1\le 2sR^2 \Leftrightarrow 1\le 3R^2$
只需證明：$a+b+c=2s=3\le 3\sqrt{3}R\Rightarrow 1\le 3R^2$ ，
利用正弦定理及合分比性質，得
$2R=\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}$ ，又
$\sin A+\sin B+\sin C\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ，
所以 $2R=\frac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}\ge\frac{2}{3\sqrt{3}}(a+b+c)\Rightarrow 3\sqrt{3}R\ge a+b+c$ ，
其中 A,B,C 表示此三角形之三內角， 故得証。</td></tr>
</table>

九十九學年度高級中學數學能力競賽決賽

<table>
<tr><td colspan="4">題目：設 a,b 為正整數。若 $a+2b$ 為 41 的倍數，且 $a-2b$ 為 43 的倍數，
求 $a+b$ 的最小值。</td></tr>
<tr><td>試題來源</td><td colspan="3">□ 自 編 □ 改編於：</td></tr>
<tr><td>類 別</td><td colspan="3">□ 代 數 □ 數 論 □ 組 合 □ 幾 何</td></tr>
<tr><td>難 易 度</td><td>□ 難 □ 中等 □ 易</td><td>編 號</td><td>獨立研究(一)第三題</td></tr>
<tr><td colspan="4">解答：因 $a+2b$ 為 41 的倍數，得 $21a+b=21(a+2b)-41b$ 亦為 41 的倍數；
同樣的，因 $a-2b$ 為 43 的倍數，
得 $21a+b=21(a-2b)+43b$ 為 43 的倍數。
因 41 與 43 互質，故 $21a+b$ 為 $41\times 43=1763$ 的倍數。
令 $21a+b=1763n$ ，則
$21(a+b)=1763n+20b=(21\times 84)n-n+21b-b=(21\times 84)n+21b-(n+b)$ ，
從而得 $n+b$ 為 21 的倍數。
故 $a+b=83n+20(n+b)/21\geq 83+20=103$ 。
當 $n=1$ ，$b=20$ 時，$a+b=103$ 為最小，這時 $a=83$ 。
檢驗 $a+2b=83+40=123=3\times 41$ ，$a-2b=83-40=43$ 合乎所求。
因此 $a+b$ 的最小值為 103。</td></tr>
</table>