九十九學年度高級中學數學能力競賽決賽

題目：試求實數ｒ之值使$\sqrt{11-r}+\sqrt{11+r}$ 為一整數。			
試題來源	■ 自 編 □ 改編於：		
類 別	□ 代 數 ■ 數 論 □ 組 合 □ 幾 何		
難 易 度	□ 難 □ 中等 ■ 易	編 號	口試 第一題

解答：令$\sqrt{11-r}+\sqrt{11+r}=n$，$n$爲整數;

將上式平方後可得$22+2\sqrt{121-r^2}=n^2\Rightarrow\ \sqrt{121-r^2}=\dfrac{n^2}{2}-11$,

由於$\sqrt{121-r^2}\ \geq 0\Rightarrow\dfrac{n^2}{2}-11\geq 0\Rightarrow n>4$,又

$\sqrt{121-r^2}\ \leq 11\Rightarrow\dfrac{n^2}{2}-11\leq 11\Rightarrow n^2\leq 44\Rightarrow n<7$

而有 $4<n<7$;當$n=5\Rightarrow\sqrt{121-r^2}=\dfrac{25}{2}-11=\dfrac{3}{2}\Rightarrow r=\pm\dfrac{5}{2}\sqrt{19}$.

當$n=6\Rightarrow\sqrt{121-r^2}=\dfrac{36}{2}-11=7\Rightarrow r=\pm\sqrt{170}$.

九十九學年度高級中學數學能力競賽決賽

<table>
<tr><td colspan="4">題目：試證 $(n+1)^n < 3n^n$ 對每一正整數 n 都成立 。</td></tr>
<tr><td>試題來源</td><td colspan="3">□ 自 編 □ 改編於：參考 $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$ 設計</td></tr>
<tr><td>類　　別</td><td colspan="3">□ 代 數 □ 數 論 □ 組 合 □ 幾 何</td></tr>
<tr><td>難 易 度</td><td>□ 難 ■ 中等 □ 易</td><td>編 號</td><td>口試 第二題</td></tr>
</table>

解答：

$$
\begin{aligned}
(n+1)^n &= n^n + c_1^n n^{n-1} + \cdots c_k^n n^{n-k} + \cdots c_n^n \\
&= n^n + n^n + \frac{n(n-1)}{2!} n^{n-2} + \cdots + \frac{n(n-1)(n-k+1)}{k!} n^{n-k} \\
&\quad + \cdots\cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-n+1)}{n!} \\
&= n^n + n^n + \frac{n^n}{2!}(1-\frac{1}{n}) + \cdots + \frac{n^n}{k!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{k-1}{n}) \\
&\quad + \cdots + \frac{n^n}{n!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n}) \\
&= n^n + n^n(1 + \frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n}) + \cdots + \frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n})) \\
&< n^n + n^n(1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots \frac{1}{n!}) \\
&< n^n + n^n(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}) (\because p! \geq 2^{p-1}) \\
&< 3n^n
\end{aligned}
$$