# 九十八學年度高級中學數學能力競賽決賽

| | | | |
|---|---|---|---|
| 題目：設 $[x]$ 表示不大於 $x$ 的最大整數。試證：對每一個正整數 $n$，以下等式恆成立：$$[n\pi]+[n(10-\pi)]=[n(2+\sqrt{2})]+[n(8-\sqrt{2})]\text{。}$$ | | | |
| 試題來源 | □ 自 編　■ 改編於：Betty 定理之特例 | | |
| 類　別 | ■ 代 數　□ 數 論　□ 組 合　□ 幾 何 | | |
| 難易度 | □ 難　□ 中等　■ 易 | 編 號 | 筆試(二)第一題 |

解答：設 $a=\pi, b=10-\pi, c=2+\sqrt{2}, d=8-\sqrt{2}$，則 $a,b,c,d$ 都是正無理數，且 $a+b=c+d$ 。

若以 $\{x\}$ 表示 $x$ 的小數部分，則

$$\begin{aligned}[na]+[nb] &= (na-\{na\})+(nb-\{nb\}) \\ &=(na+nb)-(\{na\}+\{nb\}) \\ &=10n-(\{na\}+\{nb\}) \qquad (1)\end{aligned}$$

又 $na$ 與 $nb$ 都是正無理數，故 $0<\{na\}<1$ 且 $0<\{nb\}<1$ 。於是，可得

$$0<\{na\}+\{nb\}<2\text{ 。}$$

再由(1)知 $\{na\}+\{nb\}=10n-([na]+[nb])$ 是一整數，故 $\{na\}+\{nb\}=1$ 。因此，

$$[na]+[nb]=10n-1\text{ 。}$$

同理，$[nc]+[nd]=10n-1$ 。因此，對每一個正整數 $n$，恆有

$$[na]+[nb]=10n-1=[nc]+[nd]\text{；}$$

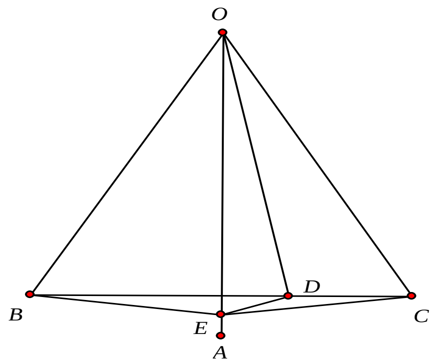
即 $[n\pi]+[n(10-\pi)]=[n(2+\sqrt{2})]+[n(8-\sqrt{2})]$ 。

# 九十八學年度高級中學數學能力競賽決賽

**題目：** 給定空間中一球面 $\Gamma$，其球心為 $O$。設 $A, B, C$ 為 $\Gamma$ 上三相異點，其中每一對點所連線段都不是 $\Gamma$ 的直徑，且 $O, A, B, C$ 不共面。平面 $OBC$ 交球面 $\Gamma$ 得一大圓，令 $\alpha$ 表示此大圓上端點為 $B$ 與 $C$ 的劣弧(註：劣弧是指弧長小於半圓周長的弧)。同樣地，$\beta$ 表示平面 $OCA$ 交球面 $\Gamma$ 所得大圓上端點為 $C$ 與 $A$ 的劣弧，$\gamma$ 表示平面 $OAB$ 交球面 $\Gamma$ 所得大圓上端點為 $A$ 與 $B$ 的劣弧。試證：在 $\alpha$ 、$\beta$ 與 $\gamma$ 三弧中，任意兩弧長的和都大於第三弧長。

| | | | |
|---|---|---|---|
| **試題來源** | ■ 自　編　　□ 改編於： | | |
| **類　別** | □ 代 數　　□ 數 論　　□ 組 合　　■ 幾 何 | | |
| **難易度** | □ 難　　■ 中等　　□ 易 | **編　號** | 筆試(二)第二題 |

**解答：**




因為 $\alpha$ 、$\beta$ 與 $\gamma$ 三弧都在球面 $\Gamma$ 的大圓上，而大圓的半徑都等於球面 $\Gamma$ 的半徑 $r$，所以，依弧長公式 $s = r\theta$，可知　($\alpha$ 的弧長)：($\beta$ 的弧長)：($\gamma$ 的弧長)

$=(\angle BOC$ 的度數$)$：$(\angle COA$ 的度數$)$：$(\angle AOB$ 的度數$)$。

於是，只要證明：「在 $\angle BOC$ 、$\angle COA$ 與 $\angle AOB$ 三角中，任意兩角的和都大於第三角。」就可得證。設 $\angle BOC \geq \angle COA$ 且 $\angle BOC \geq \angle AOB$。若其中至少有一式的等號成立，則顯然有「其中任意兩角的和都大於第三角」。設 $\angle BOC > \angle COA$ 且 $\angle BOC > \angle AOB$。在 $\overline{BC}$ 上選取點 $D$ 使 $\angle BOD = \angle AOB$，接著在 $\overline{OA}$ 上選取點 $E$ 使得 $\overline{OE} = \overline{OD}$。依 SAS 全等定理，可得 $\Delta OBD$ 與 $\Delta OBE$ 全等。於是，得 $\overline{BE} = \overline{BD}$。連接 $\overline{EC}$，在 $\Delta BCE$ 中，因為 $\overline{BE} + \overline{CE} > \overline{BC} = \overline{BD} + \overline{CD}$，所以，得 $\overline{CE} > \overline{CD}$。在 $\Delta OCD$ 與 $\Delta OCE$ 中，因為 $\overline{OC} = \overline{OC}$ 、$\overline{OD} = \overline{OE}$ 、$\overline{CD} < \overline{CE}$，可得 $\angle COD < \angle COE$。由此進一步得

$$\angle BOC = \angle BOD + \angle COD < \angle BOD + \angle COE = \angle BOE + \angle COE = \angle BOA + \angle COA，$$

亦即：$\angle AOB + \angle COA > \angle BOC$。這就是所欲證的結果。

# 九十八學年度高級中學數學能力競賽決賽

**題目：** 在一個 $13 \times 13$ 的方格表中，每一格子填入數字 0 或 1 的其中一個。假設任意兩行和任意兩列相交的四個方格中，至少要填入一個 0，那麼在此方格表內可以填入數字 1 的個數之最大值為何？並證明你(妳)的答案。

| | | | |
|---|---|---|---|
| **試題來源** | ■ 自 編　□ 改編於： | | |
| **類　別** | □ 代 數　□ 數 論　■ 組 合　□ 幾 何 | | |
| **難易度** | ■ 難　□ 中等　□ 易 | **編 號** | 筆試(二)第三題 |

**解答：** 設 $d_k$ 為第 $k$ 行出現 1 的個數，則第 $k$ 行中每兩個 1 一組，共有 $C_2^{d_k} = \frac{1}{2} d_k(d_k - 1)$ 組。由已知條件可知：某行中出現兩個 1 的一組在其他行不會再出現同位置的一組。

於是可得 $\frac{1}{2} d_1(d_1 - 1) + \frac{1}{2} d_2(d_2 - 1) + \cdots + \frac{1}{2} d_{13}(d_{13} - 1) \le C_2^{13} = 78$。

即 $d_1(d_1 - 1) + d_2(d_2 - 1) + \cdots + d_{13}(d_{13} - 1) \le 156$。

記 $M := d_1 + d_2 + \cdots + d_{13}$，則由柯西不等式，可得

$M^2 = (d_1 + d_2 + \cdots + d_{13})^2 \le (1^2 + 1^2 + \cdots + 1^2)(d_1^2 + d_2^2 + \cdots + d_{13}^2) \le 13(156 + M)$

，即 $M$ 滿足二次不等式 $M^2 - 13M - 13 \cdot 156 \le 0$。由此可得

$$M \le \frac{13 + \sqrt{13^2 - 4 \cdot (-13 \cdot 156)}}{2} = 52。$$

以下可以構造出 $M = 52$ 的例子，因此，可以填入數字 1 的個數之最大值為 52。

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | | | | | | | | | |
| 1 | | | | 1 | 1 | 1 | | | | | | |
| 1 | | | | | | | 1 | 1 | 1 | | | |
| 1 | | | | | | | | | | 1 | 1 | 1 |
| | 1 | | | 1 | | | 1 | | | 1 | | |
| | 1 | | | | 1 | | | 1 | | | 1 | |
| | 1 | | | | | 1 | | | 1 | | | 1 |
| | | 1 | | 1 | | | | | 1 | | 1 | |
| | | 1 | | | 1 | | 1 | | | | | 1 |
| | | 1 | | | | 1 | | 1 | | 1 | | |
| | | | 1 | 1 | | | | 1 | | | | 1 |
| | | | 1 | | 1 | | | | 1 | 1 | | |
| | | | 1 | | | 1 | 1 | | | | 1 | |