

# 九十八學年度高級中學數學能力競賽決賽

## 筆試試題（二）

### 注意事項：

- (1) 時間：2 小時（16:00~18:00）
  - (2) 配分：每題皆為 7 分
  - (3) 不可使用計算器
  - (4) 請將答案依序寫在答案卷內
- 

一、設  $[x]$  表示不大於  $x$  的最大整數。試證：對每一個正整數  $n$ ，以下等式恆成立：

$$[n\pi] + [n(10 - \pi)] = [n(2 + \sqrt{2})] + [n(8 - \sqrt{2})]。$$

二、給定空間中一球面  $\Gamma$ ，其球心為  $O$ 。設  $A, B, C$  為  $\Gamma$  上三相異點，其中每一對點所連線段都不是  $\Gamma$  的直徑，且  $O, A, B, C$  不共面。平面  $OBC$  交球面  $\Gamma$  得一大圓，令  $\alpha$  表示此大圓上端點為  $B$  與  $C$  的劣弧（註：劣弧是指弧長小於半圓周長的弧）。同樣地， $\beta$  表示平面  $OCA$  交球面  $\Gamma$  所得大圓上端點為  $C$  與  $A$  的劣弧， $\gamma$  表示平面  $OAB$  交球面  $\Gamma$  所得大圓上端點為  $A$  與  $B$  的劣弧。試證：在  $\alpha$ 、 $\beta$  與  $\gamma$  三弧中，任意兩弧長的和都大於第三弧長。

三、在一個  $13 \times 13$  的方格表中，每一格子填入數字 0 或 1 的其中一個。假設任意兩行和任意兩列相交的四個方格中，至少要填入一個 0，那麼在此方格表內可以填入數字 1 的個數之最大值為何？並證明你(妳)的答案。