九十八學年度高級中學數學能力競賽決賽

題目：試求滿足 $(2^x-1)^2=3y^2+1$ 的所有整數解 (x,y)。			
試題來源	□ 自 編　■ 改編於： Monthly, Nov. 2009		
類　別	□ 代 數　■ 數 論　□ 組 合　□ 幾 何		
難易度	□ 難　□ 中等　■ 易	編 號	筆試(一)第一題

解答：顯然，當 $x\le 0$ 時，無解；當 $1\le x\le 3$ 時，只有 $(1,0),(3,4)$ 及 $(3,-4)$ 的解。現在證明 $x\ge 4$ 時，亦無整數解：

$$\left(2^x-1\right)^2-1=3y^2 \Rightarrow 2^x\left(2^x-2\right)=3y^2 \Rightarrow y \text{ 是偶數。}$$

上式同除以 4 ： $2^{x-1}\left(2^{x-1}-1\right)=3\left(\dfrac{y}{2}\right)^2$ 。

再由 $\left(2^{x-1},2^{x-1}-1\right)=1$，且 $3\nmid 2^{x-1}$ 知：存在 k,l 使得

$$\begin{cases} 2^{x-1}=k^2 \\ 2^{x-1}-1=3\ell^2 \end{cases}，且\ k\ell=\frac{y}{2},(k,\ell)=1\text{。}$$

由此得 $2^{x-1}\equiv 1 \pmod 3$，故 x 是奇數；於是，$x\ge 5$。

又 $3\ell^2=2^{x-1}-1=\left(2^{\frac{x-1}{2}}+1\right)\left(2^{\frac{x-1}{2}}-1\right)$ 且 $\left(2^{\frac{x-1}{2}}+1,2^{\frac{x-1}{2}}-1\right)=1$，

故 $2^{\frac{x-1}{2}}+1$ 和 $2^{\frac{x-1}{2}}-1$ 中有一為完全平方數 a^2，其中 a 為非負整數。

(1)若 $2^{\frac{x-1}{2}}+1=a^2 \Rightarrow 2^{\frac{x-1}{2}}=(a+1)(a-1) \Rightarrow 2^{\frac{x-5}{2}}=(\frac{a+1}{2})(\frac{a-1}{2})$ 。

因 $\dfrac{a+1}{2}$ 和 $\dfrac{a-1}{2}$ 為連續正整數，得 $\dfrac{x-5}{2}=1 \Rightarrow x=7$，代入原式不合。

(2)若 $2^{\frac{x-1}{2}}-1=a^2$，則 a 為奇數；再由 $\dfrac{x-1}{2}\ge 2$，得 $-1\equiv 1 \pmod 4$，矛盾。

因此， $x\ge 4$ 時，原式無整數解。故本題僅有三組解 $(1,0),(3,4)$ 及 $(3,-4)$。

九十八學年度高級中學數學能力競賽決賽

題目：設 $[x]$ 表示不大於 x 的最大整數。已知有 98 個球，球上各有一個編碼，這 98 個編碼 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{98}$ 都是不為零的實數，滿足：

$$\left[(a_1{}^2 + a_2{}^2 + \cdots + a_{98}{}^2)\left(\frac{1}{a_1{}^2} + \frac{1}{a_2{}^2} + \cdots + \frac{1}{a_{98}{}^2}\right)\right] = 98^2 \text{。}$$

對每一個 k，任取 k 球(不重複)，若出現的編碼為 $b_1, b_2, \cdots, b_k$，則定義 $f(k) = (b_1{}^2 + b_2{}^2 + \cdots + b_k{}^2)\left(\frac{1}{b_1{}^2} + \frac{1}{b_2{}^2} + \cdots + \frac{1}{b_k{}^2}\right)$，而 $f(0) = 33$。

試證：$\left[\frac{1}{99}\sum_{k=0}^{98} f(k)\right]$ 恆為定值(與取球的結果無關)；並求此定值。

試題來源	■ 自 編　　□ 改編於：
類　別	■ 代 數　　□ 數 論　　□ 組 合　　□ 幾 何
難易度	□ 難　　■ 中等　　□ 易　　**編 號**　筆試(一)第二題

解答：首先，證明以下的命題：對每一正整數 k，$k^2 \le f(k) < k^2 + 1$。

不失一般性，可設 $\{b_1, b_2, \cdots, b_k\} = \{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$。利用柯西不等式，可得

$$f(k) = (a_1{}^2 + a_2{}^2 + \cdots + a_k{}^2)\left(\frac{1}{a_1{}^2} + \frac{1}{a_2{}^2} + \cdots + \frac{1}{a_k{}^2}\right) \ge (1 + 1 + \cdots + 1)^2 = k^2 \text{。}$$

另一方面， $98^2 + 1 > (a_1{}^2 + a_2{}^2 + \cdots + a_{98}{}^2)\left(\frac{1}{a_1{}^2} + \frac{1}{a_2{}^2} + \cdots + \frac{1}{a_{98}{}^2}\right)$

$$= \left(\sum_{i=1}^{k} a_i{}^2 + \sum_{j=k+1}^{98} a_j{}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{a_i{}^2} + \sum_{j=k+1}^{98}\frac{1}{a_j{}^2}\right)$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{k} a_i{}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{a_i{}^2}\right) + \left(\sum_{j=k+1}^{98} a_j{}^2\right)\left(\sum_{j=k+1}^{98}\frac{1}{a_j{}^2}\right) + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=k+1}^{98}\left(\frac{a_i{}^2}{a_j{}^2} + \frac{a_j{}^2}{a_i{}^2}\right)$$

$$\ge \left(\sum_{i=1}^{k} a_i{}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{a_i{}^2}\right) + \left(\sum_{j=k+1}^{98} 1\right)^2 + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=k+1}^{98} 2 \qquad \text{(柯西 + 算幾不等式)}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{k} a_i{}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{a_i{}^2}\right) + (98-k)^2 + 2k(98-k) = \left(\sum_{i=1}^{k} a_i{}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{a_i{}^2}\right) + 98^2 - k^2 \text{。}$$

於是，$f(k) < k^2 + 1$；故命題得證。因此，

$$\frac{1}{99}\left(33+\sum_{k=1}^{98}k^2\right) \le \frac{1}{99}\sum_{k=0}^{98} f(k) < \frac{1}{99}\left(33+\sum_{k=1}^{98}(k^2+1)\right)\text{，}$$

即 $3218 \le \frac{1}{99}\sum_{k=0}^{98} f(k) < 3218 + \frac{98}{99}$；故 $\left[\frac{1}{99}\sum_{k=0}^{98} f(k)\right] = 3218$ 為一個定值。

九十八學年度高級中學數學能力競賽決賽

題目： 在 ΔABC 中，已知 D, E, F 分別為三邊 $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}$ 上一點，使得 $\Delta ADF, \Delta BED, \Delta CFE$ 的面積相等。試證：ΔDEF 是正三角形的充要條件為 ΔABC 是正三角形。

試題來源	■ 自 編　　□ 改編於：		
類　別	□ 代 數　□ 數 論　□ 組 合　■ 幾 何		
難易度	■ 難　□ 中等　□ 易	**編　號**	筆試(一)第三題

解答：（1）若 ΔABC 是正三角形，不妨設其邊長為 1，並令 $\overline{AD}=x,\ \overline{BE}=y,\ \overline{CF}=z$。

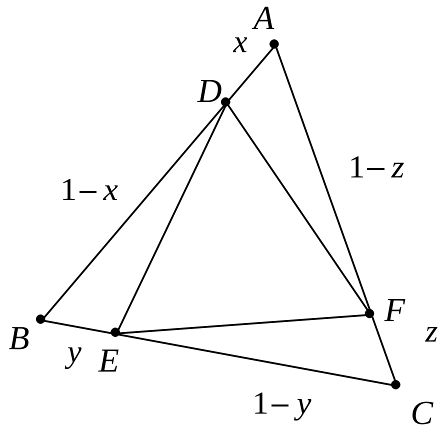
由 $\Delta ADF, \Delta BED, \Delta CFE$ 之面積相等，可得

$$\frac{1}{2}x(1-z)\sin 60^\circ, = \frac{1}{2}y(1-x)\sin 60^\circ = \frac{1}{2}z(1-y)\sin 60^\circ，$$

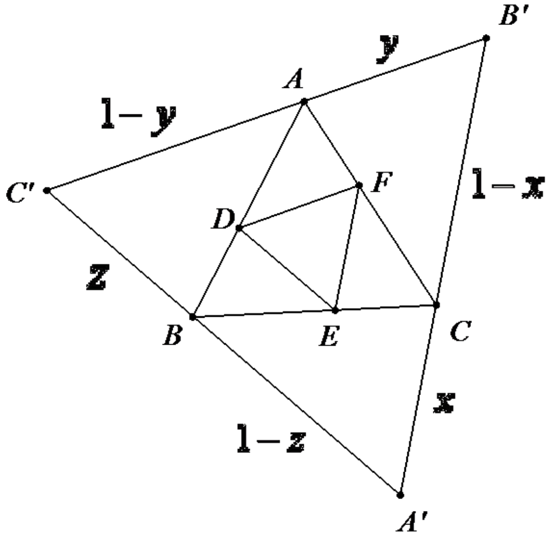
即 $x(1-z)=y(1-x)=z(1-y)$ ……（1）

以下證明：$x=y=z$。

假設 x, y, z 三者全相異，不妨設 $x>y>z$，於是，$1-z>1-y>1-x$，因而得 $x(1-z)>y(1-x)$，矛盾！因此，x, y, z 中某兩數相等；再由(1)可進一步導出 $x=y=z$。故由餘弦定理可知 $\overline{DE}=\overline{EF}=\overline{FD}$，即 ΔDEF 為正三角形。



（2）若 ΔDEF 是正三角形，分別過 A, B, C 作平行 $\overline{FD}, \overline{DE}, \overline{EF}$ 的三條直線，則此三線交出一個正 $\Delta A'B'C'$（如下圖所示）。不妨設 $\overline{A'B'}=\overline{B'C'}=\overline{C'A'}=1$，並設 $\overline{A'C}=x,\ \overline{B'A}=y,\ \overline{C'B}=z$。於是，$\overline{CB'}=1-x,\ \overline{AC'}=1-y,\ \overline{BA'}=1-z$。



因為 $\Delta ADF,\ \Delta BED,\ \Delta CEF$ 三者面積相等，所以，A 到 $\overline{DF}$、B 到 $\overline{DE}$、C 到 $\overline{EF}$ 三者之距離皆相等，不妨設為 h。於是，E 到 $\overline{A'B}$ 與到 $\overline{A'C}$ 的距離也都是 h。

由 $\Delta A'BC$ 之面積 $=\Delta A'BE$ 之面積 $+\Delta A'CE$ 之面積，得

$$\frac{1}{2}(1-z)h+\frac{1}{2}xh=\frac{1}{2}x(1-z)\sin 60^\circ。$$

同理，$\Delta B'AC$ 之面積 $=\frac{1}{2}(1-x)h+\frac{1}{2}yh=\frac{1}{2}y(1-x)\sin 60^\circ$，

$\Delta C'BA$ 之面積 $=\frac{1}{2}(1-y)h+\frac{1}{2}zh=\frac{1}{2}z(1-y)\sin 60^\circ$。

合併上面三式，可建立以下等式：

$$\frac{x+(1-z)}{x(1-z)}=\frac{y+(1-x)}{y(1-x)}=\frac{z+(1-y)}{z(1-y)}=\frac{\sin 60^\circ}{h}。$$

因此，

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{1-z}=\frac{1}{y}+\frac{1}{1-x}=\frac{1}{z}+\frac{1}{1-y}\quad\cdots\cdots\quad(2)$$

當 x, y, z 三者全相異，不妨設 $x>y>z$，於是，

$$\frac{1}{x}<\frac{1}{y}<\frac{1}{z}\quad 且\quad \frac{1}{1-x}>\frac{1}{1-y}>\frac{1}{1-z}。$$

由此得 $\frac{1}{x}+\frac{1}{1-z}<\frac{1}{y}+\frac{1}{1-x}$，此與(2)矛盾。故 x, y, z 中必有兩數相等，再由(2)可導得三者都相等，由此可知：ΔABC 是正三角形。