九十八學年度高級中學數學能力競賽決賽

筆試試題（一）

注意事項：

（1）時間：2 小時（13:30～15:30）
（2）配分：每題皆為 7 分
（3）不可使用計算器
（4）請將答案依序寫在答案卷內

一、試求滿足 $(2^x - 1)^2 = 3y^2 + 1$ 的所有整數解 (x, y)。

二、設 $[x]$ 表示不大於 x 的最大整數。已知有 98 個球，球上各有一個編碼，這 98 個編碼 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{98}$ 都是不為零的實數，滿足：

$$\left[(a_1^{\ 2} + a_2^{\ 2} + \cdots + a_{98}^{\ 2})(\frac{1}{a_1^{\ 2}} + \frac{1}{a_2^{\ 2}} + \cdots + \frac{1}{a_{98}^{\ 2}})\right] = 98^2 。$$

對每一個 k，任取 k 球(不重複)，若出現的編碼為 $b_1, b_2, \cdots, b_k$，則定義 $f(k) = (b_1^{\ 2} + b_2^{\ 2} + \cdots + b_k^{\ 2})(\frac{1}{b_1^{\ 2}} + \frac{1}{b_2^{\ 2}} + \cdots + \frac{1}{b_k^{\ 2}})$，而 $f(0) = 33$。

試證：$\left[\frac{1}{99}\sum_{k=0}^{98} f(k)\right]$ 恆為定值(與取球的結果無關)；並求此定值。

三、在 ΔABC 中，已知 D, E, F 分別為三邊 $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}$ 上一點，使得 $\Delta ADF, \Delta BED, \Delta CFE$ 的面積相等。試證：ΔDEF 是正三角形的充要條件為 ΔABC 是正三角形。