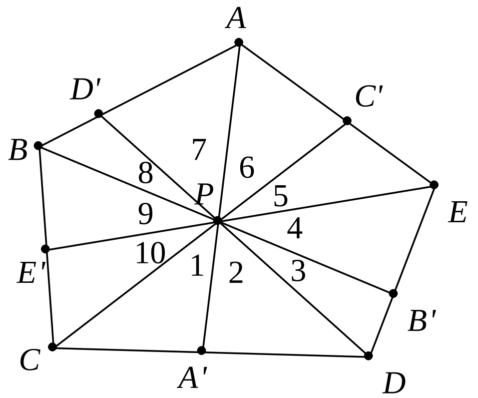
九十八學年度高級中學數學能力競賽決賽

<table>
<tr><td colspan="4">題目：設 $ABCDE$ 為凸五邊形，而 P 為其內部一點，滿足：直線 $\overleftrightarrow{AP},\overleftrightarrow{BP},\overleftrightarrow{CP},\overleftrightarrow{DP},\overleftrightarrow{EP}$ 分別交線段 $\overline{CD},\overline{DE},\overline{EA},\overline{AB},\overline{BC}$ 的內部於點 A',B',C',D',E'。試確定 $\dfrac{\overline{CA'}}{\overline{A'D}}\times\dfrac{\overline{DB'}}{\overline{B'E}}\times\dfrac{\overline{EC'}}{\overline{C'A}}\times\dfrac{\overline{AD'}}{\overline{D'B}}\times\dfrac{\overline{BE'}}{\overline{E'C}}$ 之值；並證明你(妳)的答案。</td></tr>
<tr><td>試題來源</td><td colspan="3">■ 自 編　　□ 改編於：</td></tr>
<tr><td>類　別</td><td colspan="3">□ 代 數　　□ 數 論　　□ 組 合　　■ 幾 何</td></tr>
<tr><td>難易度</td><td>□ 難　□ 中等　■ 易</td><td>編 號</td><td>獨立研究(二)第一題</td></tr>
</table>

解答：



(1) 猜測答案：當 $ABCDE$ 為正五邊形，且 P 為其中心，則 A',B',C',D',E' 恰為各邊的中點；

於是，$\dfrac{\overline{CA'}}{\overline{A'D}}\times\dfrac{\overline{DB'}}{\overline{B'E}}\times\dfrac{\overline{EC'}}{\overline{C'A}}\times\dfrac{\overline{AD'}}{\overline{D'B}}\times\dfrac{\overline{BE'}}{\overline{E'C}}=1$。

(2) 在 ΔPCD 中，設 $\angle CPA' = \angle 1, \angle DPA' = \angle 2$，則由正弦定理知：

$$\Delta CPA' : \Delta DPA' = \frac{1}{2}\overline{CP}\times\overline{PA'}\sin\angle 1 : \frac{1}{2}\overline{DP}\times\overline{PA'}\sin\angle 2 = \overline{CP}\sin\angle 1 : \overline{DP}\sin\angle 2$$ 。

又 $\Delta CPA' : \Delta DPA' = \overline{CA'} : \overline{A'D}$，於是，$\dfrac{\overline{CA'}}{\overline{A'D}} = \dfrac{\overline{CP}\sin\angle 1}{\overline{DP}\sin\angle 2}$。同理，$\dfrac{\overline{DB'}}{\overline{B'E}} = \dfrac{\overline{DP}\sin\angle 3}{\overline{EP}\sin\angle 4}$，

$\dfrac{\overline{EC'}}{\overline{C'A}} = \dfrac{\overline{EP}\sin\angle 5}{\overline{AP}\sin\angle 6}$，$\dfrac{\overline{AD'}}{\overline{D'B}} = \dfrac{\overline{AP}\sin\angle 7}{\overline{BP}\sin\angle 8}$，$\dfrac{\overline{BE'}}{\overline{E'C}} = \dfrac{\overline{BP}\sin\angle 9}{\overline{CP}\sin\angle 10}$。於是，原乘積式

$$\frac{\overline{CA'}}{\overline{A'D}}\times\frac{\overline{DB'}}{\overline{B'E}}\times\frac{\overline{EC'}}{\overline{C'A}}\times\frac{\overline{AD'}}{\overline{D'B}}\times\frac{\overline{BE'}}{\overline{E'C}} = \frac{\sin\angle 1}{\sin\angle 2}\times\frac{\sin\angle 3}{\sin\angle 4}\times\frac{\sin\angle 5}{\sin\angle 6}\times\frac{\sin\angle 7}{\sin\angle 8}\times\frac{\sin\angle 9}{\sin\angle 10} = 1$$ 。

(因對頂角相等：$\angle 1 = \angle 6, \angle 2 = \angle 7, \angle 3 = \angle 8, \angle 4 = \angle 9, \angle 5 = \angle 10$)

九十八學年度高級中學數學能力競賽決賽

<table>
<tr><td colspan="5">題目：設 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ 為 n 個正整數，且 $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_n$ 。試證：
$$(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n)^2 \le a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + \cdots + a_n^3，$$
並找出等號成立的充要條件。</td></tr>
<tr><td>試題來源</td><td colspan="4">■ 自 編　　□ 改編於：</td></tr>
<tr><td>類　別</td><td colspan="4">■ 代 數　　□ 數 論　　□ 組 合　　□ 幾 何</td></tr>
<tr><td>難易度</td><td colspan="2">□ 難　　□ 中等　　■ 易</td><td>編　號</td><td>獨立研究(二)第二題</td></tr>
</table>

解答：利用數學歸納法：

當 $n = 1$ 時，原式顯然成立，且等號成立的充要條件為 $a_1^2 = a_1^3$，得 $a_1 = 1$。

假設 $n = k$ 時，$(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k)^2 \le a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + \cdots + a_k^3$ 成立，且等號成立的充要條件為 $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, \cdots, a_k = k$，則當 $n = k+1$ 時，由於

$$a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + \cdots + a_k^3 \ge (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k)^2 = \sum_{i=1}^{k} a_i^2 + 2\sum_{i<j}^{k} a_i a_j 。$$

兩邊同加上 a_{k+1}^3，故僅須證明:

$$\sum_{i=1}^{k} a_i^2 + 2\sum_{i<j}^{k} a_i a_j + a_{k+1}^3 \ge \sum_{i=1}^{k+1} a_i^2 + 2\sum_{i<j}^{k+1} a_i a_j \Leftrightarrow a_{k+1}^3 \ge a_{k+1}^2 + 2a_{k+1}\sum_{i=1}^{k} a_i$$

$$\Leftrightarrow a_{k+1}^2 \ge a_{k+1} + 2\sum_{i=1}^{k} a_i$$

而等號成立的充要條件為 $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, \cdots, a_k = k$，且 $a_{k+1}^2 = a_{k+1} + 2\sum_{i=1}^{k} i$，

即 $a_{k+1}^2 = a_{k+1} + k(k+1)$，分解得 $(a_{k+1} + k)(a_{k+1} - k - 1) = 0$，故 $a_{k+1} = k + 1$。

因此，我們僅須證明: $a_{k+1}^2 \ge a_{k+1} + 2\sum_{i=1}^{k} a_i$ 。仍然利用數學歸納法，證明如下：

假設 $a_{k+1}^2 \ge a_{k+1} + 2\sum_{i=1}^{k} a_i$ 成立，兩邊同加上 $a_{k+1} + a_{k+2}$，則有

$$a_{k+1}^2 + a_{k+1} + a_{k+2} \ge a_{k+1} + 2\sum_{i=1}^{k} a_i + a_{k+1} + a_{k+2} = a_{k+2} + 2\sum_{i=1}^{k+1} a_i 。$$

因此，只要證明: $a_{k+2}^2 \ge a_{k+1}^2 + a_{k+1} + a_{k+2} \Leftrightarrow a_{k+2}(a_{k+2} - 1) \ge a_{k+1}(a_{k+1} + 1)$ 。

而上式中，最後的不等式顯然成立，這是因為

$$a_{k+2} > a_{k+1} \Rightarrow a_{k+2} \ge a_{k+1} + 1 \text{ 且 } a_{k+2} - 1 \ge a_{k+1} 。$$

九十八學年度高級中學數學能力競賽決賽

題目：設 $r_1,r_2,\cdots,r_m,s_1,s_2,\cdots,s_n$ 為給定的 $m+n$ 個非負整數(m,n 為正整數)，它們滿足 $\sum_{i=1}^{m} r_i=\sum_{j=1}^{n} s_j$ 。對於一個 $m\times n$ 階的矩陣 $A=\left[a_{ij}\right]$ ，若同時滿足下列三個條件，則稱矩陣 A 為「金矩陣」：

(1) 每一個 a_{ij} 都是非負整數；

(2) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}=r_i$ $(1\le i\le m)$ 且 $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}=s_j$ $(1\le j\le n)$；

(3) 若 $(p-i)(q-j)<0$，則 $a_{ij}=0$ 或 $a_{pq}=0$ 。

試問有多少種 $m\times n$ 階的金矩陣？並證明你(妳)的答案。

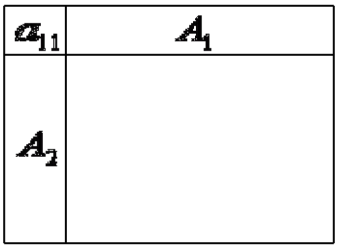
試題來源	■ 自 編　□ 改編於：		
類　別	□ 代 數　□ 數 論　■ 組 合　□ 幾 何		
難易度	■ 難　□ 中等　□ 易	編 號	獨立研究(二)第三題

解答：對 $m+n$，我們以數學歸納法證明：各階的金矩陣都是唯一的。

顯然，當 $m=n=1$ 時，$a_{11}=r_1=s_1$，故只能有一種金矩陣 $A=\left[r_1\right]=\left[s_1\right]$ 。

假設當行數與列數之和小於 $m+n$ 時，都只有一種金矩陣。

以下考慮 $m\times n$ 階的金矩陣 $A=\left[a_{ij}\right]$ ，其行數與列數之和等於 $m+n$：



如圖，令 $A_1=(a_{12},a_{13},\cdots,a_{1n}),\ A_2=(a_{21},a_{31},\cdots,a_{m1})$，則 $(i-1)(1-j)<0$ 對所有 $2\le i\le m$ 及 $2\le j\le n$ 均成立，由條件(3)可知 $A_1=\vec{0}$ 或 $A_2=\vec{0}$。又因(A_1 中各數之和)$+a_{11}=r_1$，且(A_2 中各數之和)$+a_{11}=s_1$，所以，$a_{11}=\min\{r_1,s_1\}$。 由對稱性，不妨設 $r_1\le s_1$ (即設 A_1 中的數全為 0)，此時 $a_{11}=r_1$。考慮去掉第一列後剩下的 $(m-1)\times n$ 的矩陣 B，此矩陣各列所有數的和分別為 $r_2,r_3,\ \cdots,\ r_m$；各行所有數的和分別為 $s_1-r_1,s_2,\cdots,s_n$。這些數均為非負整數，且滿足 $r_2+r_3+\cdots+r_m=(s_1-r_1)+s_2+\cdots+s_n$ (這是因為 $r_1+r_2+\cdots+r_m=s_1+s_2+\cdots+s_n$)。經檢驗 B 確實滿足金矩陣的三個條件；故由數學歸納法的假設知：此矩陣 B 是唯一的 $(m-1)\times n$ 階金矩陣。而矩陣 A 的第 1 列數也都已確定(除了 $a_{11}=r_1$ 外其餘都是 0)。因此，$A=\left[a_{ij}\right]$ 是唯一的 $m\times n$ 階金矩陣。