九十八學年度高級中學數學能力競賽決賽

獨立研究試題（二）

注意事項：

（1）三題中自選兩題作答，並請註明題號

（2）時間：2 小時（10:20～12:20）

（3）配分：每題皆為 7 分

（4）不可使用計算器

（5）請將答案寫在答案卷內

一、設 $ABCDE$ 為凸五邊形，而 P 為其內部一點，滿足：直線 $\overleftrightarrow{AP},\overleftrightarrow{BP},\overleftrightarrow{CP},\overleftrightarrow{DP},\overleftrightarrow{EP}$ 分別交線段 $\overline{CD},\overline{DE},\overline{EA},\overline{AB},\overline{BC}$ 的內部於點 A',B',C',D',E'。試確定 $\dfrac{\overline{CA'}}{\overline{A'D}}\times\dfrac{\overline{DB'}}{\overline{B'E}}\times\dfrac{\overline{EC'}}{\overline{C'A}}\times\dfrac{\overline{AD'}}{\overline{D'B}}\times\dfrac{\overline{BE'}}{\overline{E'C}}$ 之值；並證明你(妳)的答案。

二、設 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n$ 為 n 個正整數，且 $a_1<a_2<a_3<\cdots<a_n$。試證：

$$(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)^2\le a_1^3+a_2^3+a_3^3+\cdots+a_n^3，$$

並找出等號成立的充要條件。

三、設 $r_1,r_2,\cdots,r_m,s_1,s_2,\cdots,s_n$ 為給定的 $m+n$ 個非負整數(m,n 為正整數)，它們滿足 $\sum_{i=1}^{m}r_i=\sum_{j=1}^{n}s_j$。對於一個 $m\times n$ 階的矩陣 $A=\left[a_{ij}\right]$，若同時滿足下列三個條件，則稱矩陣 A 為「金矩陣」：

（1）每一個 a_{ij} 都是非負整數；

（2）$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}=r_i$（$1\le i\le m$）且 $\sum_{i=1}^{m}a_{ij}=s_j$（$1\le j\le n$）；

（3）若 $(p-i)(q-j)<0$，則 $a_{ij}=0$ 或 $a_{pq}=0$。

試問有多少種 $m\times n$ 階的金矩陣？並證明你(妳)的答案。