九十八學年度高級中學數學能力競賽決賽

題目：設 $x_1, y_1, x_2, y_2, \cdots, x_{4n}, y_{4n}$ 是 $8n$ 個正實數，且 $x_i x_{i+1} x_{i+2} x_{i+3} = y_i y_{i+1} y_{i+2} y_{i+3}$ 對每一個 $i \in \{4k+1 \mid k = 0, 1, 2, \cdots, n-1\}$ 均成立。試證：$\sum_{i=1}^{4n}\left(\frac{x_i}{x_i+y_i}\right)^2 \geq n$。				
試題來源	□ 自 編　■ 改編於： 大陸高中競試			
類　別	■ 代 數　□ 數 論　□ 組 合　□ 幾 何			
難易度	□ 難　■ 中等　□ 易	編 號	獨立研究(一)第一題	

解答：首先，證明以下的不等式：對任意正實數 α, β，恆有

$$\frac{1}{(1+\alpha)^2}+\frac{1}{(1+\beta)^2} \geq \frac{1}{1+\alpha\beta}\text{。}$$

【證】
$$[(1+\alpha)^2+(1+\beta)^2](1+\alpha\beta)-(1+\alpha)^2(1+\beta)^2$$
$$=2(1+\alpha\beta)+2(\alpha+\beta)(1+\alpha\beta)+(\alpha^2+\beta^2)(1+\alpha\beta)$$
$$-(\alpha+\beta)^2-(1+\alpha\beta)^2-2(\alpha+\beta)(1+\alpha\beta)$$
$$=1+\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)-2\alpha\beta-\alpha^2\beta^2$$
$$=\alpha\beta(\alpha-\beta)^2+(\alpha\beta-1)^2 \geq 0$$

其次，令 $a_i = \frac{y_i}{x_i}$，則對每一個 $i \in \{4k+1 \mid k = 0, 1, 2, \cdots, n-1\}$，恆有 $a_i a_{i+1} a_{i+2} a_{i+3} = 1$。將欲證明的不等式每四項一組分成 n 組：

$$\sum_{i=1}^{4n}\left(\frac{x_i}{x_i+y_i}\right)^2 = \sum_{i=1}^{4n}\left(\frac{1}{1+a_i}\right)^2 \quad \text{（以下各式中的 } i = 4k+1\text{）}$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{(1+a_i)^2}+\frac{1}{(1+a_{i+1})^2}+\frac{1}{(1+a_{i+2})^2}+\frac{1}{(1+a_{i+3})^2}\right)$$

$$\geq \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{1+a_i a_{i+1}}+\frac{1}{1+a_{i+2}a_{i+3}}\right) = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{1+a_i a_{i+1}}+\frac{a_i a_{i+1}}{a_i a_{i+1}+a_i a_{i+1} a_{i+2} a_{i+3}}\right)$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{1+a_i a_{i+1}}+\frac{a_i a_{i+1}}{a_i a_{i+1}+1}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n\text{。}$$

九十八學年度高級中學數學能力競賽決賽

題目： 設 a,b,c,d 為正實數。下列敘述正確者給出證明，不正確者舉出反例：

（1）若 $a+b=c+d$，則 $[na]+[nb]=[nc]+[nd]$ 對每一個正整數 n 恆成立。

（2）若存在無限多個正整數 n，使得 $[na]+[nb]=[nc]+[nd]$ 成立，則 $a+b=c+d$。

試題來源	□ 自 編　■ 改編於：Math. Game *III*
類　別	■ 代 數　□ 數 論　□ 組 合　□ 幾 何
難易度	□ 難　□ 中等　■ 易　**編 號**　獨立研究(一)第二題

解答： （1）敘述不正確，例如：取 $a=b=\frac{1}{2}, c=\frac{1}{3}, d=\frac{2}{3}$，則

（i）當 $n=6k, 6k+1$ 或 $6k+5$ 時，$\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{2}\right]=\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{2n}{3}\right]$。

（ii）當 $n=6k+2, 6k+3$ 或 $6k+4$ 時，$\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{2}\right]\neq\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{2n}{3}\right]$。

（2）敘述正確

若以 $\{x\}$ 表示 x 的小數部分，則 $[nt]=nt-\{nt\}, \forall t\in\mathbb{R}$。

當正整數 n 滿足 $[na]+[nb]=[nc]+[nd]$ 時，可得

$$na-\{na\}+nb-\{nb\}=nc-\{nc\}+nd-\{nd\}。$$

於是，$(a+b)-(c+d)=\frac{1}{n}(\{na\}+\{nb\}-\{nc\}-\{nd\})$。再由 $0\le\{x\}<1$，可得

$$|(a+b)-(c+d)|<\frac{1}{n}(1+1)=\frac{2}{n}。$$

由於有無限多個正整數 n 使此一不等式成立，因此，可得證 $|(a+b)-(c+d)|=0$，

即 $a+b=c+d$。

九十八學年度高級中學數學能力競賽決賽

題目： 如圖四邊形 $ABCD$ 中，$\overline{BA}$ 和 $\overline{CD}$ 延長線交於點 P，$\overline{BC}$ 和 $\overline{AD}$ 延長線交於點 Q，$\angle A$與$\angle C$外角平分線交於點 K，$\angle B$與$\angle D$外角平分線交於點 L；並設 ΔBCP 中 $\angle P$與 ΔABQ 中 $\angle Q$的外角平分線交於點 M。試證：L, K, M 三點共線。

<table>
<tr><td>試題來源</td><td colspan="3">■ 自 編　　□ 改編於：</td></tr>
<tr><td>類　別</td><td colspan="3">□ 代 數　　□ 數 論　　□ 組 合　　■ 幾 何</td></tr>
<tr><td>難易度</td><td>■ 難　　□ 中等　　□ 易</td><td>編 號</td><td>獨立研究(一)第三題</td></tr>
</table>

解答： 設直線 LD, MQ 交於點 F，直線 MQ, KC 交於點 G，直線 KC, LD 交於點 H；以及直線 LB, MP 交於點 F'，直線 MP, KA 交於點 G'，直線 KA, LB 交於點 H'。

針對 ΔFGH 與 $\Delta F'G'H'$，利用荻沙格(Desargues)定理，欲證：L, K, M 三點共線，僅須證明 FF', GG', HH' 三線共點即可。

至於證明 FF', GG', HH' 三線共點，可由下列論述獲證:
由 F 為 ΔCDQ 的旁心，F' 為 ΔBCP 的旁心, 得知 FF' 為 $\angle QCD$ 的外角平分線。
同理，GG' 為 $\angle QDC$ 的外角平分線。又 H 為 ΔDQC 的內心，H' 為 ΔABQ 的旁心，故 HH' 為 $\angle DQC$ 的角平分線。因此，FF', GG', HH' 三線共點。