

九十八學年度高級中學數學能力競賽決賽

獨立研究試題（一）

注意事項：

- (1) 三題中自選兩題作答，並請註明題號
- (2) 時間：2 小時（8:10~10:10）
- (3) 配分：每題皆為 7 分
- (4) 不可使用計算器
- (5) 請將答案寫在答案卷內

一、設 $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_{4n}, y_{4n}$ 都是正實數，且 $x_i x_{i+1} x_{i+2} x_{i+3} = y_i y_{i+1} y_{i+2} y_{i+3}$ 對每一個 $i \in \{4k+1 \mid k=0, 1, 2, \dots, n-1\}$ 均成立。試證： $\sum_{i=1}^{4n} \left(\frac{x_i}{x_i + y_i} \right)^2 \geq n$ 。

二、設 a, b, c, d 為正實數。下列敘述正確者給出證明，不正確者舉出反例：

- (1) 若 $a+b=c+d$ ，則 $[na] + [nb] = [nc] + [nd]$ 對每一個正整數 n 恆成立。
- (2) 若存在無限多個正整數 n ，使得 $[na] + [nb] = [nc] + [nd]$ 成立，則 $a+b=c+d$ 。

三、如圖四邊形 $ABCD$ 中， \overline{BA} 和 \overline{CD} 延長線交於點 P ， \overline{BC} 和 \overline{AD} 延長線交於點 Q ， $\angle A$ 與 $\angle C$ 外角平分線交於點 K ， $\angle B$ 與 $\angle D$ 外角平分線交於點 L ；並設 $\triangle BCP$ 中 $\angle P$ 與 $\triangle ABQ$ 中 $\angle Q$ 的外角平分線交於點 M 。試證： L, K, M 三點共線。

