九十八學年度高級中學數學能力競賽決賽

題目： 已知有一個長方體的盒子，其長、寬、高分別為 a,b,c ，且表面積是某質數的冪次方，其中 a,b,c 都是小於 2009 的質數。試確定 a,b,c 的所有可能值。				
試題來源	■ 自 編　　□ 改編於：			
類　別	□ 代 數　■ 數 論　□ 組 合　□ 幾 何			
難易度	□ 難　□ 中等　■ 易	**編 號**	口試 第一題	

解答： 表面積 $2(ab+bc+ca)$ 是某質數的冪次方，且由於 $2(ab+bc+ca)$ 的值是偶數，因此，可令 $2(ab+bc+ca)=2^n$ ，其中 n 是正整數。

由於 a,b,c 為質數，而質數都是大於或等於 2 的整數，所以 $2(ab+bc+ca)$ 的值至少是 24，因此， $n \geq 5$ 。於是， $ab+bc+ca=2^{n-1}$ 。

（1）如果 a,b,c 都是偶數，則 $a=b=c=2$ ，而 $2(ab+bc+ca)=24$（矛盾）。

（2）如果 a,b,c 都是奇數，則 $ab+bc+ca$ 是奇數（矛盾）。

（3）如果 a,b,c 恰有一偶數、二奇數，則 $ab+bc+ca$ 也是奇數（矛盾）。

因此，符合命題的 a,b,c 恰有一奇數、二偶數，可令 $a=b=2$，則 $4+4c=2^{n-1}$；

於是，$c=2^{n-3}-1\leq 2009$，其中符合命題的質數 $c=3,7,31,127$。

結論：長、寬、高 a,b,c 的所有可能值為以下四種：

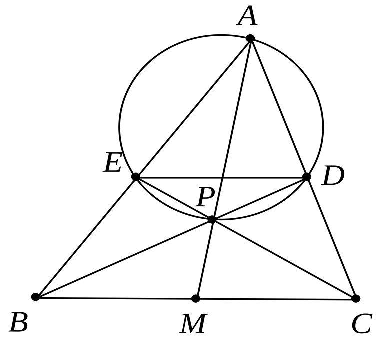
2, 2, 3
2, 2, 7
2, 2, 31
2, 2, 127

九十八學年度高級中學數學能力競賽決賽

題目： 在 ΔABC 中，$\overline{AM}$ 為 $\overline{BC}$ 邊上的中線，點 P 在 $\overline{AM}$ 上；延長 $\overline{BP}$ 與 $\overline{CP}$ 分別交 $\overline{AC}$ 與 $\overline{AB}$ 於點 D 與點 E。試證：若 $\angle CBD = \angle BAM$，則 $\overline{AB} \times \overline{PE} = \overline{AC} \times \overline{PD}$。

試題來源	■ 自 編　　□ 改編於：		
類　別	□ 代 數　　數 論　　□ 組 合　　■ 幾 何		
難易度	□ 難　■ 中等　□ 易	編 號	口試 第二題

解答：



(1) 由西瓦(Ceva)定理，$\dfrac{\overline{AE}}{\overline{EB}} \times \dfrac{\overline{BM}}{\overline{MC}} \times \dfrac{\overline{CD}}{\overline{DA}} = 1$，又 $\overline{BM} = \overline{MC}$，故 $\dfrac{\overline{AE}}{\overline{EB}} \times \dfrac{\overline{CD}}{\overline{DA}} = 1$，即 $\dfrac{\overline{AE}}{\overline{EB}} = \dfrac{\overline{AD}}{\overline{DC}}$；因此，$\overline{ED} \parallel \overline{BC}$。

(2) 由 $\overline{ED} \parallel \overline{BC}$，可得 $\angle CBD = \angle BDE$；又已知 $\angle CBD = \angle BAM$，於是，$\angle BDE = \angle BAM$；故 A, E, P, D 四點共圓。

因 M 為 $\overline{BC}$ 邊的中點，故 ΔABM 與 ΔACM 的面積相等，且 ΔBPM 與 ΔCPM 的面積也相等。又 $\overline{ED} \parallel \overline{BC}$，得 ΔBEC 與 ΔCDB 的面積相等。由此可推得 ΔAEP 與 ΔADP 的面積相等，故 $\dfrac{1}{2}\overline{AE} \times \overline{EP} \sin \angle AEP = \dfrac{1}{2}\overline{AD} \times \overline{DP} \sin \angle ADP$。又 $\angle AEP + \angle ADP = 180^\circ$，得 $\sin \angle AEP = \sin \angle ADP$，故 $\overline{AE} \times \overline{EP} = \overline{AD} \times \overline{DP}$，

即 $\dfrac{\overline{AE}}{\overline{AD}} = \dfrac{\overline{PD}}{\overline{PE}}$。又 $\overline{ED} \parallel \overline{BC}$，得 $\dfrac{\overline{AE}}{\overline{AD}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$；故 $\dfrac{\overline{PD}}{\overline{PE}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$，得證。